**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, K. Dannert

WS 2017/18

# 3. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 30. Oktober in der Vorlesung oder um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Teilaufgaben, die mit einem * versehen sind, sind Bonusaufgaben.

**Aufgabe 1** 4 Punkte

Zeigen Sie, dass die Klasse HF der hereditär endlichen Mengen sowie die Klasse $\mathbb{S} = \{x \mid x = x\}$ aller Mengen Limesstufen sind.

**Aufgabe 2** 5 Punkte

Für eine Klasse $A$ sei $S(A)$ die kleinste Stufe mit $A \subseteq S(A)$. Der *cut* einer Klasse $A$ ist $\mathrm{cut}(A) = \{x \in A \mid S(x) \subseteq S(y) \text{ für alle } y \in A\}$. Ferner seien $a$ eine beliebige Menge und $\mathbb{S} = \{x \mid x = x\}$ die Klasse aller Mengen. Berechnen Sie $\mathrm{cut}(\mathbb{S})$ und $\mathrm{cut}(\{x \mid a \in x\})$.

**Aufgabe 3** $3 + 4 + 6^*$ Punkte

(a) Nach der Vorlesung ist jede Stufe erblich und transitiv. Geben Sie eine Menge an, die erblich und transitiv ist, die aber keine Stufe ist.

(b) Aus dem Kreationsaxiom folgt, dass zu einer beliebigen Menge $x$ die Vereinigung $\bigcup x = \{z \in S(x) \mid \text{ es gibt ein } y \in x \text{ mit } z \in y\}$ existiert. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass die Vereinigung beziehungsweise der Schnitt einer Menge von Stufen wieder eine Stufe ist. Zeigen oder widerlegen Sie ferner, dass die Vereinigung einer Menge von Geschichten wieder eine Geschichte ist.

(c)* Wir betrachten nun eine beliebige Menge $x$, die transitiv und unter $\in$ linear geordnet ist. Ein Anfangsstück von $x$ ist eine transitive Teilmenge von $x$. Man zeige, dass eine Teilmenge $y \subseteq x$ genau dann ein Anfangsstück von $x$ ist, wenn $y \in x$ oder $y = x$ ist.

**Aufgabe 4** $2 + 1 + 2 + 3$ Punkte

Eine Menge $a$ heißt *induktiv*, wenn $\emptyset \in a$ und für alle $x \in a$ gilt $x \cup \{x\} \in a$. Sei

$$\omega = \bigcap\{a \mid a \text{ ist induktiv}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\omega$ eine Menge ist.

(b) Ist $\omega$ induktiv?

(c) Gibt es ein Element von $\omega$, das nicht transitiv ist?

(d) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\omega$ die kleinste Limesstufe ist.