Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, K. Dannert

WS 2017/18

2. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 23. Oktober in der Vorlesung oder um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 5 + 5 Punkte

(a) Aus dem Kreationsaxiom folgt, dass für jede Menge x eine transitive Menge y mit $x \subseteq y$ existiert. Zeigen Sie, dass dann auch eine eindeutig bestimmte *kleinste* transitive Menge $\mathrm{TC}(x)$ existiert, sodass $x \subseteq \mathrm{TC}(x)$ gilt. $\mathrm{TC}(x)$ nennt man auch den *transitiven Abschluss* (engl.: transitive closure) von x.

(b) Sei n eine natürliche Zahl und $a = \{x\}$ eine hereditär endliche Menge mit $x \in \mathrm{HF}_n$. Bestimmen Sie, wie viele Elemente $\mathrm{TC}(a)$ mindestens enthält, wie viele Elemente $\mathrm{TC}(a)$ maximal enthält und geben Sie jeweils eine Menge $x \in \mathrm{HF}_n$ an, für die Ihre Schranke angenommen wird.

Aufgabe 2 4 Punkte

Seien a, b Mengen und A, B echte Klassen. Sei $\varphi(x)$ eine Eigenschaft von Mengen. Welche der folgenden Klassen sind Mengen? Für welche von ihnen braucht man zusätzliche Informationen, um dies zu entscheiden?

$$a \cap b,\ a \cap B,\ A \cap B,\ \bigcap a,\ \bigcap A,\ a \backslash A,\ A \backslash B,\ \{x \in A \mid x \in a \cap b,\ \varphi(x)\}.$$

Aufgabe 3 (2 + 2) + 4 Punkte

Eine Klasse A heißt *erblich*, wenn für alle $a \subseteq b \in A$ auch $a \in A$ ist.

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Eine Klasse A ist genau dann erblich und transitiv, wenn $\mathrm{acc}(A) = A$ ist.

(ii) Ist B eine erbliche und transitive Klasse und $A \subseteq B$, so gilt $\mathrm{acc}(a) \subseteq B$.

(b) Sei $a \in \mathrm{HF}_n$ für eine natürliche Zahl n. Wir definieren $a_0 \coloneqq a$ und $a_{i+1} \coloneqq \mathrm{acc}(a_i)$ für alle natürlichen Zahlen $i > 0$. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl k gibt mit $a_{k+1} = a_k$ und zeigen Sie ferner, dass a_k erblich und transitiv ist.

Aufgabe 4 6 Punkte

Bestimmen Sie die Akkumulationen der folgenden Mengen und untersuchen Sie, ob es sich jeweils um eine Geschichte handelt:

$$A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\},$$
$$A_2 = \{[2], [3]\},$$
$$A_3 = \{\mathrm{HF}_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$