Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

9. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Donnerstag, 18. Dezember um 16:15 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 2+4+2+2 Punkte

Sei τ eine Signatur und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen. Dann heißt $\mathfrak{A}$ *elementare Substruktur von* $\mathfrak{B}$, wenn für alle Formeln $\varphi(\overline{x}) \in \mathrm{FO}(\tau)$ und alle Tupel $\overline{a} \subseteq A$ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$ gilt, wenn auch $\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{a})$ gilt. Wir schreiben dann $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Es seien im Folgenden $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ drei τ-Strukturen für eine Signatur τ. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ und sei A oder B endlich. Dann gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

(b) Ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$, so ist auch $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(c) Gilt $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(d) Gilt $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Aufgabe 2 3+3 Punkte

Eine Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ heißt modellvollständig, falls für beliebige τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ aus $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ bereits $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ folgt.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die Modellvollständigkeit der Theorien $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, S)$ mit der Nachfolgerfunktion S sowie $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, <)$ mit der üblichen Relation $<$.

(b) Zeigen Sie, dass alle vollständigen Theorien über der Signatur $\sigma = \{P\}$ mit einem unären Relationssymbol P modellvollständig sind.

Hinweis: Verschaffen Sie sich mit Hilfe der elementaren Äquivalenz von σ-Strukturen einen Überblick über die vollständigen Theorien über σ.

Aufgabe 3 3+3+4+6* Punkte

Eine Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ *erlaubt Quantorenelimination*, wenn für jede Formel $\varphi(\overline{x}) \in \mathrm{FO}(\tau)$ eine quantorenfreie Formel $\vartheta(\overline{x}) \in \mathrm{FO}(\tau)$ existiert, so dass $T \models \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \vartheta(\overline{x}))$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ genau dann Quantorenelimination erlaubt, wenn für jede quantorenfreie Formel $\psi(\overline{x}, y) \in \mathrm{FO}(\tau)$ eine quantorenfreie Formel $\vartheta(\overline{x}) \in \mathrm{FO}(\tau)$ exisitiert, so dass $T \models \forall\overline{x}(\exists y\psi(\overline{x}, y) \leftrightarrow \vartheta(\overline{x}))$ gilt.

(b) Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Theorie, die Quantorenelimination erlaubt. Zeigen Sie, dass T modellvollständig ist.

(c) Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Theorie, die Quantorenelimination erlaubt, für eine Signatur τ, die keine Konstantensymbole enthält. Zeigen Sie, dass T vollständig ist.

(d*) Zeigen Sie, dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte Quantorenelimination erlaubt.

Hinweis: Benutzen Sie die disjunktive Normalform zur Darstellung der quantorenfreien Formeln über $<$.