Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

4. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Mittwoch, 12. November um 12:15 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgaben, die mit einem * versehen sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 2 + 2 Punkte

Sei X eine nicht-leere Menge von Ordinalzahlen.

(a) Zeigen Sie, dass $\bigcup X = \sup X$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für jede Ordinalzahl α gilt: $\alpha = \bigcup \alpha \iff \alpha$ ist Limesordinal oder $\alpha = \emptyset$.

Aufgabe 2 6 Punkte

Schreiben Sie die folgenden Ordinale in Cantornormalform

(a) $(((1 + \omega) + 1) + \omega) + 1$

(b) $(((2 \cdot \omega) \cdot 2) \cdot \omega) \cdot 2$

(c) $\sup\{\omega + n \mid n \in \omega\}$

(d) $(\omega + 1)^{\omega+1}$

(e) $2^{2^{2^\omega}}$

(f) $\bigcup\{\alpha \in \omega \mid \alpha^\omega = \omega\}$

Aufgabe 3 1 + 4 + 5 Punkte

Eine Ordinalzahl $\alpha \in \mathrm{On}$ heißt *prim*, falls $\alpha > 1$ und für alle $\beta, \gamma \in \mathrm{On}$ aus $\alpha = \beta\gamma$ folgt, dass $\beta = \alpha$ oder $\gamma = \alpha$ gilt.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: α ist genau dann prim, wenn für alle $\beta, \gamma \in \mathrm{On}$ aus $\alpha = \beta\gamma$ folgt, dass $\beta = 1$ oder $\gamma = 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie per transfiniter Induktion, dass sich jede Ordinalzahl $\alpha > 1$ als Produkt von primen Ordinalzahlen darstellen läßt.

(c) Bestimmen Sie alle primen $\alpha \in \mathrm{On}$ mit $\alpha < \omega^2$.

Hinweis: Sie können benutzen, dass jedes $\alpha < \omega^2$ sich in Cantornormalform als $\alpha = \omega n_1 + n_2$ für $n_1, n_2 < \omega$ darstellen läßt.

Aufgabe 4* 6* + 4* Punkte

Ein Funktional $F\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ ist *normal*, wenn es die folgenden beiden Eigenschaften hat:

1. Für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ gilt: $\alpha < \beta \Rightarrow F(\alpha) < F(\beta)$ ("F ist strikt steigend") und
2. Für alle Limesordinale $\lambda \in \mathrm{On}$ gilt: $F(\lambda) = \sup\{F(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$ ("F ist stetig")

(a) Zeigen Sie, dass jedes normale Funktional beliebig große Fixpunkte $\alpha = F(\alpha)$ hat.

(b) Folgern Sie aus a), dass es ein Ordinal $\alpha > \omega$ mit $\omega^\alpha = \alpha$ gibt.