

8. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 10. Dezember um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

2 + 4 + 2 Punkte

Es seien $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ drei τ -Strukturen für eine Signatur τ . Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Sei $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ und sei A oder B endlich. Dann gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.
- (b) Ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$, so ist auch $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.
- (c) Gilt $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Aufgabe 2

3 + 3 Punkte

Eine Theorie $T \subseteq \text{FO}(\tau)$ heißt modellvollständig, falls für beliebige τ -Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ aus $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ bereits $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ folgt.

- (a) Beweisen oder widerlegen Sie die Modellvollständigkeit der Theorien $\text{Th}(\mathbb{N}, S)$ mit der Nachfolgerfunktion S sowie $\text{Th}(\mathbb{Z}, <)$ mit der üblichen Relation $<$.
- (b) Zeigen Sie, dass alle vollständigen Theorien über der Signatur $\sigma = \{P\}$ mit einem unären Relationssymbol P modellvollständig sind.

Hinweis: Verschaffen Sie sich mit Hilfe der elementaren Äquivalenz von σ -Strukturen einen Überblick über die vollständigen Theorien über σ .

Aufgabe 3

3 + 3 + 4 + 6* Punkte

Eine Theorie $T \subseteq \text{FO}(\tau)$ erlaubt *Quantorenelimination*, wenn für jede Formel $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ eine quantorenfreie Formel $\vartheta(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ existiert, so dass $T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \vartheta(\bar{x}))$.

- (a) Zeigen Sie, dass eine Theorie $T \subseteq \text{FO}(\tau)$ genau dann Quantorenelimination erlaubt, wenn für jede quantorenfreie Formel $\psi(\bar{x}, y) \in \text{FO}(\tau)$ eine quantorenfreie Formel $\vartheta(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ existiert, so dass $T \models \forall \bar{x}(\exists y \psi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \vartheta(\bar{x}))$ gilt.
- (b) Sei $T \subseteq \text{FO}(\tau)$ eine Theorie, die Quantorenelimination erlaubt. Zeigen Sie, dass T modellvollständig ist.
- (c) Sei $T \subseteq \text{FO}(\tau)$ eine Theorie, die Quantorenelimination erlaubt, für eine Signatur τ , die keine Konstantensymbole enthält. Zeigen Sie, dass T vollständig ist.
- (d*) Zeigen Sie, dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte Quantorenelimination erlaubt.

Hinweis: Benutzen Sie die disjunktive Normalform zur Darstellung der quantorenfreien Formeln über $<$.