

5. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 19. November um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

2 + 3 + 3 Punkte

- (a) Geben Sie eine (die) Menge von kleinstem Rang an, welche keine Ordinalzahl ist.
- (b) Zeigen Sie, dass eine Klasse X genau dann eine Menge ist, wenn die Klasse $\{\rho(x) \mid x \in X\}$ beschränkt, also in einer Stufe enthalten ist.
- (c) Zeigen Sie, dass jede Ordinalzahl eindeutig darstellbar ist in der Form $\lambda + n$, wobei $n \in \omega$ und λ eine Limesordinalzahl oder 0 ist.

Aufgabe 2

6 Punkte

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

- (a) $((1 + \omega) + 1) + \omega$,
- (b) $((2 \cdot \omega) \cdot 2) \cdot \omega$,
- (c) $\sup\{\omega + n \mid n \in \omega\}$,
- (d) $\sup\{\omega \cdot n + 3 \mid n \in \omega\}$,
- (e) $(2 \cdot (\omega + 1)) \cdot \omega$,
- (f) $\bigcup\{n \in \omega \mid n \text{ gerade}\}$,

Aufgabe 3

2 + 4 Punkte

Die Addition und die Multiplikation auf Ordinalen sind nicht kommutativ, deswegen sind je zwei verschiedene Definitionen für Subtraktion und Division mit Rest denkbar.

- (a) Zeigen Sie, dass sowohl für die Subtraktion “ $-$ ” als auch für die Division mit Rest “ $:$ ” auf Ordinalzahlen jeweils nur eine Definition sinnvoll ist, und geben Sie diese an.
- (b) Widerlegen Sie folgende Aussagen über Subtraktion und Division auf Ordinalen durch Gegenbeispiele:
 - (i) $\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma$,
 - (ii) $\alpha \cdot \alpha - \beta \cdot \beta = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta)$ für $\alpha \geq \beta$,
 - (iii) $(\alpha + \beta) - \beta = \alpha$,
 - (iv) $(\alpha \cdot \beta) : \beta = (\alpha, 0)$.

Aufgabe 4

6 Punkte

- (a) Zeigen Sie, dass zu jeder Ordinalzahl α eine Limesordinalzahl $\lambda > \alpha$ existiert.
Hinweis: Benutzen Sie den Rekursionsatz, um die Funktion $f : \omega \rightarrow \mathbb{S}$ mit $f(0) = \alpha$ und $f(n+1) = f(n) \cup \{f(n)\}$ zu definieren.
- (b) Sei (\mathbb{S}, \in) ein Modell von ZFC. Zeigen Sie, dass die Struktur $(S_{\omega+\omega}, \in)$ ein Modell von ZFC ohne das Ersetzungsaxiom ist, wobei das Ersetzungsaxiom nicht gilt.