

Modelltheorie

Die Modelltheorie beschäftigt sich mit der Klassifikation mathematischer Strukturen und Abbildungen mit Hilfe von logischen Formeln sowie dem Zusammenhang zwischen rein syntaktischen und semantischen Eigenschaften logischer Formeln. Ist eine Formel einer gewissen Logik in einer entsprechenden Struktur erfüllt, so sagt man, dass die Struktur ein *Modell* dieser Formel ist.

Wir werden hier einen Überblick über einige zentrale Konzepte geben, die in der Modelltheorie eine Rolle spielen wie zum Beispiel Amalgamation, Typen und elementare Erweiterungen.

Wir wollen dabei vor allem folgende Fragen beantworten.

- (1) Wie lassen sich gegebene mathematische Strukturen erweiteren beziehungsweise anreichern?

Wir werden das Konzept der Amalgamation in verschiedenen Versionen kennenlernen und in einigen zentralen Konstruktionen anwenden.

- (2) Wie lassen sich semantische Eigenschaften von Formelmengen durch syntaktische Eigenschaften charakterisieren?

Wir werden zwei zentrale Charakterisierungssätze beweisen, die solche Beziehungen herstellen. Einerseits den Satz von Los-Tarski, der eine semantische Charakterisierung des Π_1 -Fragmentes von FO liefert und andererseits den Satz von van Benthem, der die Modallogik als das bisimulationsinvariante Fragment von FO identifiziert.

- (3) Welches sind die geeigneten Werkzeuge um die Ausdrucksstärke einer Logik zu beurteilen und welche Konzepte sind besonders geeignet, fundamentale Schwächen gewisser Logiken zu beheben?

Wir werden Logiken vorstellen, die stärker sind als die Prädikatenlogik erster Stufe, wie z.B. infinitäre Logik oder Fixpunktlogiken. Fixpunktlogiken sind eng mit Induktions- bzw. Rekursionsmechanismen verknüpft und haben vielfältige Anwendungen von der Mengenlehre bis hin zur Informatik. Um die Ausdrucksstärke infinitärer Logiken besser analysieren zu können, werden wir uns eingehend mit Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen für diese Logiken befassen.

Zunächst fixieren wir die Notation, die wir im Folgenden verwenden werden.

- (1) Wir bezeichnen mit $\varphi, \psi, \vartheta, \dots$ stets Formeln einer gewissen Logik \mathcal{L} , das heißt $\varphi \in \mathcal{L}(\tau)$ für eine Signatur τ . Wir schreiben dafür auch oft einfach $\varphi \in \mathcal{L}$, wenn die Signatur keine Rolle spielt.
- (2) Wir schreiben $\bar{x} := (x_1, \dots, x_n)$ für Tupel von Variablen. Entsprechend schreiben wir auch $Q\bar{x}$ für $Qx_1 \dots Qx_n$, $Q \in \{\exists, \forall\}$. Die Schreibweise $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ beziehungsweise $\varphi(\bar{x})$ bedeutet, dass *höchstens* die Variablen x_1, \dots, x_n in φ

frei vorkommen. Für ein Tupel $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ von Elementen einer Struktur und eine Formel $\varphi \in \text{FO}$ mit $\text{Frei}(\varphi) = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ für eine Menge $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ schreiben wir dann entsprechend auch $\varphi(\bar{a}) = \varphi(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$. Falls die freien Variablen der Formel für die Argumentation nicht relevant sind, so schreiben wir einfach φ .

- (3) Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ stets Strukturen mit einer gewissen Signatur τ . Mit A, B, C, \dots bezeichnen wir die jeweiligen Universen der Strukturen. Wir lassen hier auch leere Universen zu. Als Belegung für freie Variablen treten häufig Tupel $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ für ein geeignetes $n < \omega$ auf. Wenn die Länge des Tupels nicht relevant ist, so schreiben wir häufig einfach $\bar{a} \subseteq A$.
- (4) Wir werden mit $\bar{a} \subseteq A$ auch nichtendliche Tupel von Elementen aus A bezeichnen, das heißt $\bar{a} = (a_\gamma)_{\gamma < \alpha}$ für eine Ordinalzahl $\alpha \in \text{On}$. Falls wir ein solches Tupel als Belegung für freie Variablen einer Formel der finitären Logik erster Stufe verwenden so ist natürlich gemeint, dass eine endliche Teilmenge dieses Tupels als Belegung dieser freien Variablen verwendet wird.
- (5) Wir treffen die Vereinbarung, dass $0 := \bigvee_{i \in \emptyset} (x_i = x_i) \in \text{FO}(\tau)$ sowie $1 := \bigwedge_{i \in \emptyset} (x_i = x_i) \in \text{FO}(\tau)$ für jede Signatur τ gilt, das heißt die falsche und die wahre Aussage sind in der Prädikatenlogik erster Stufe über jeder beliebigen Signatur quantorenfrei ausdrückbar.

1 Charakterisierungssätze

Charakterisierungssätze schaffen Verbindungen zwischen syntaktischen und semantischen Eigenschaften von Formeln. Erhaltungssätze haben also die folgende Form.

Eine Formel $\psi \in \text{FO}$ hat eine semantische Eigenschaft P genau dann,
wenn ψ äquivalent ist zu einer Formel $\varphi \in F_P \subseteq \text{FO}$.

Dabei ist F_P ein Fragment von FO, das durch bestimmte syntaktische Eigenschaften definiert ist. Wir werden uns die Sätze von Los-Tarski sowie von van Benthem ansehen.

Satz von Los-Tarski Eine Formel ψ bleibt erhalten unter Substrukturen (das heißt aus $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \models \psi$ folgt $\mathfrak{A} \models \psi$), genau dann, wenn ψ äquivalent ist zu einer universellen Formel.

Satz von van Benthem Eine Formel $\psi(x) \in \text{FO}$ mit nur ein und zweistelligen Relationssymbolen ist invariant unter Bisimulation (das heißt aus $\mathcal{K} \models \psi(v)$ und $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$ folgt $\mathcal{K}' \models \psi(v')$) genau dann, wenn $\psi(x)$ äquivalent ist zu einer Formel $\varphi \in \text{ML}$.

Dabei ist die Richtung, die von der syntaktischen auf die semantische Eigenschaft schließt, meist wesentlich einfacher. Einige elementare Resultate dieser Art werden wir in diesem Abschnitt beweisen, unter anderem die Invarianz von universellen Formeln unter Substrukturen. Die Bisimulationsinvarianz der Modallogik ist aus der Einführungsveranstaltung zur Logik bekannt.

Definition 1.1.

- (1) Eine FO-Formel ist *existentiell positiv* (Σ_1^+ -Formel), wenn sie aus atomaren Formeln mit \wedge , \vee und \exists aufgebaut ist.
- (2) Eine FO-Formel ist *existentiell* (Σ_1 -Formel), wenn sie die Form $\exists \bar{x} \varphi$ für eine quantorenfreie Formel φ hat.
- (3) Eine FO-Formel ist *universell* (Π_1 -Formel), wenn sie die Form $\forall \bar{x} \varphi$ für eine quantorenfreie Formel φ hat.
- (4) Σ_{n+1} -Formeln haben die Gestalt $\exists \bar{x} \varphi$, so dass φ eine Π_n -Formel ist.
- (5) Π_{n+1} -Formeln haben die Gestalt $\forall \bar{x} \varphi$, so dass φ eine Σ_n -Formel ist.

Σ_n -Formeln haben also die Gestalt $\exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \exists \bar{x}_3 \dots Q \bar{x}_n \varphi$ für eine quantorenfreie Formel φ , wobei $Q = \forall$ ist, falls n gerade ist und $Q = \exists$ ist, falls n ungerade ist. Analog haben Π_n -Formeln die Gestalt $\forall \bar{x}_1 \exists \bar{x}_2 \forall \bar{x}_3 \dots Q \bar{x}_n \varphi$ für eine quantorenfreie Formel φ , wobei $Q = \exists$ ist, falls n gerade ist und $Q = \forall$ ist, falls n ungerade ist.

Bemerkung 1.1. Wenn φ eine Σ_n -Formel ist, dann ist $\neg \varphi$ äquivalent zu einer Π_n -Formel.

Definition 1.2. Eine Formel $\psi(\bar{x})$ bleibt erhalten unter einer Funktion $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, wenn für alle $\bar{a} \subset A$ aus $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ folgt, dass auch $\mathfrak{B} \models \psi(f(\bar{a}))$ gilt.

Bemerkung 1.2. Sind \mathfrak{A} und \mathfrak{B} τ -Strukturen und ist $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus, so gilt $f(\llbracket t(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) = \llbracket t(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}}$ für jeden τ -Term $t(\bar{x})$ und alle $\bar{a} \subseteq A$.

Beweis. Induktion über den Termaufbau. □

Satz 1.1. Σ_1^+ -Formeln bleiben erhalten unter Homomorphismen.

Beweis. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ -Strukturen, sei $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus und sei $\varphi(\bar{x})$ eine Σ_1^+ -Formel. Wir führen eine Induktion über den Aufbau von φ . Sei zunächst $\varphi(\bar{x}) = t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})$ für zwei τ -Terme t_1 sowie t_2 und gelte $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, das heißt $\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} = \llbracket t_2(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}$. Daraus folgt $\llbracket t_1(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}} = f(\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) = f(\llbracket t_2(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) = \llbracket t_2(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}}$, womit $\mathfrak{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$ folgt. Sei nun $\varphi(\bar{x}) = R(t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x}))$ für ein k -stelliges Relationssymbol $R \in \tau$ und gewisse τ -Terme $t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x})$ und gelte $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, das heißt $(\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_k(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) \in R^{\mathfrak{A}}$. Da f ein Homomorphismus ist, folgt daraus $(\llbracket t_1(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}}, \dots, \llbracket t_k(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}}) = (f(\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}), \dots, f(\llbracket t_k(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}})) \in R^{\mathfrak{B}}$. Folglich gilt $\mathfrak{B} \models R(t_1(f(\bar{a})), \dots, t_k(f(\bar{a})))$.

Falls nun $\varphi = \psi \wedge \psi'$ oder $\varphi = \psi \vee \psi'$ für gewisse Σ_1^+ -Formeln ψ, ψ' gilt, so folgt die Behauptung unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung. Sei nun schließlich $\varphi(\bar{x}) = \exists y \psi(\bar{x}, y)$ für eine Σ_1^+ -Formel ψ und gelte $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, das heißt es gibt ein $a' \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, a')$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\mathfrak{B} \models \psi(f(\bar{a}), f(a'))$, also gilt insbesondere $\mathfrak{B} \models \exists y \psi(\bar{a}, y) = \varphi(f(\bar{a}))$, was die Induktion schließt. □

Satz 1.2. Σ_1 -Formeln bleiben unter Einbettungen erhalten.

Beweis. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ -Strukturen, sei $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ eine Einbettung und sei $\varphi = \exists \bar{x} \psi$ eine Σ_1 -Formel. Wir führen eine Induktion über $n := |\bar{x}|$. Ist zunächst $n = 0$, so ist $\varphi = \varphi(\bar{x})$ quantorenfrei und wir zeigen nun per Induktion über den Aufbau von φ ,

dass φ unter Einbettungen erhalten bleibt. Dabei nehmen wir o.B.d.A. an, dass φ in Negationsnormalform ist.

Sei zunächst $\varphi(\bar{x}) = t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})$ für zwei τ -Terme t_1, t_2 und gelte $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, das heißt $\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} = \llbracket t_2(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}$. Daraus folgt $\llbracket t_1(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}} = f(\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) = f(\llbracket t_2(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) = \llbracket t_2(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}}$, womit $\mathfrak{B} \models t_1(f(\bar{a})) = t_2(f(\bar{a}))$ folgt. Als nächstes betrachten wir den Fall $\varphi(\bar{x}) = t_1(\bar{x}) \neq t_2(\bar{x})$ für zwei τ -Terme t_1, t_2 . Wiederum gelte $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, das heißt $\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} \neq \llbracket t_2(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}$. Da f injektiv ist, folgt $f(\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) \neq f(\llbracket t_2(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}})$ und also haben wir $\llbracket t_1(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}} \neq \llbracket t_2(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}}$, was $\mathfrak{B} \models t_1(f(\bar{a})) = t_2(f(\bar{a}))$ impliziert. Sei nun $\varphi(\bar{x}) = R(t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x}))$ für ein k -stelliges Relationssymbol $R \in \tau$ und gewisse τ -Terme $t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x})$ und gelte $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, das heißt $(\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_k(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) \in R^{\mathfrak{A}}$. Da f insbesondere ein Homomorphismus ist, folgt daraus $(f(\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}), \dots, f(\llbracket t_k(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}})) \in R^{\mathfrak{B}}$ und somit $(\llbracket t_1(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}}, \dots, \llbracket t_k(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}}) \in R^{\mathfrak{B}}$. Also gilt $\mathfrak{B} \models R(t_1(f(\bar{a})), \dots, t_k(f(\bar{a})))$. Nun betrachten wir den Fall $\varphi(\bar{x}) = \neg R(t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x}))$ für ein k -stelliges Relationssymbol $R \in \tau$ und gewisse τ -Terme $t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x})$. Es gelte $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, das heißt $(\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_k(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) \notin R^{\mathfrak{A}}$. Da f die starke Homomorphieeigenschaft besitzt, folgt $(\llbracket t_1(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}}, \dots, \llbracket t_k(f(\bar{a})) \rrbracket^{\mathfrak{B}}) = (f(\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}), \dots, f(\llbracket t_k(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}})) \notin R^{\mathfrak{B}}$ und damit $\mathfrak{B} \models \neg R(t_1(f(\bar{a})), \dots, t_k(f(\bar{a})))$. Falls nun $\varphi = \psi \wedge \psi'$ oder $\varphi = \psi \vee \psi'$ für gewisse quantorenfreie Formeln ψ, ψ' gilt, so folgt die Behauptung unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung.

Sei nun $n > 0$, das heißt $\varphi(\bar{x}) = \exists y \psi(\bar{x}, y)$ für eine Σ_1 -Formel ψ und gelte $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, das heißt es gibt ein $a' \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, a')$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\mathfrak{B} \models \psi(f(\bar{a}), f(a'))$, also gilt $\mathfrak{B} \models \exists y \psi(\bar{a}, y) = \varphi(f(\bar{a}))$, was die Induktion schließt. \square

Definition 1.3. Eine Formel $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ bleibt erhalten unter Substrukturen, wenn für alle τ -Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und alle $\bar{a} \subseteq A$ aus $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$ folgt, dass auch $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ gilt.

Nun ziehen wir eine Folgerung aus Satz 1.2, die genau den Schluss von der syntaktischen auf die semantische Eigenschaft aus dem Satz von Los-Tarski liefert.

Korollar 1.1. Π_1 -Formeln bleiben unter Substrukturen erhalten.

Beweis. Sei $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ und seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ -Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Sei nun $\bar{a} \subseteq A$ beliebig mit $\mathfrak{A} \not\models \varphi(\bar{a})$, das heißt $\mathfrak{A} \models \neg \varphi(\bar{a})$. Da $\neg \varphi$ äquivalent ist zu einer Σ_1 -Formel und $id_A : A \rightarrow B$ eine Einbettung ist, folgt mit Satz 1.2, dass $\mathfrak{B} \models \neg \varphi(id_A(\bar{a})) = \neg \varphi(\bar{a})$ gilt. \square

Definition 1.4. Sei τ eine Signatur und sei α eine Ordinalzahl. Eine Folge $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta < \alpha}$ von τ -Strukturen heißt *Kette*, wenn $\mathfrak{A}_\gamma \subseteq \mathfrak{A}_\delta$ für alle $\gamma < \delta < \alpha$ gilt.

Sei nun $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta < \alpha}$ eine Kette von τ -Strukturen. Die *Vereinigung* $\mathfrak{A} = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta$ dieser Kette ist gegeben durch das Universum $A = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ und folgende Interpretation der Funktions- und Relationssymbole.

- (1) $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}}$ genau dann, wenn $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}_\beta}$ für ein (alle) $\beta < \alpha$ mit $\bar{a} \in A_\beta$.
- (2) $f^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = b$ genau dann, wenn $f^{\mathfrak{A}_\beta}(\bar{a}) = b$ für ein (alle) $\beta < \alpha$ mit $\bar{a} \in A_\beta$.

Bemerkung 1.3. Sei $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta < \alpha}$ eine Kette von τ -Strukturen für eine Signatur τ und sei $\mathfrak{A} = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta$. Dann gilt $\mathfrak{A}_\beta \subseteq \mathfrak{A}$ für alle $\beta < \alpha$.

Definition 1.5. Eine Formel $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ bleibt erhalten unter Vereinigung von Ketten, wenn für jede Kette $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta < \alpha}$ von τ -Strukturen und jedes $\bar{a} \subseteq A_0$ aus $\mathfrak{A}_\beta \models \varphi(\bar{a})$ für alle $\beta < \alpha$ folgt, dass auch $\bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta \models \varphi(\bar{a})$ gilt.

Bemerkung 1.4. Σ_2 -Formeln bleiben im Allgemeinen nicht erhalten unter Vereinigung von Ketten.

Beweis. Wir betrachten die Formel $\varphi := \exists x \forall y (y \leq x)$ und die Kette $(\mathfrak{A}_n)_{n < \omega}$ mit $\mathfrak{A}_n = (\{0, \dots, n\}, \leq)$ für $n < \omega$. Dann ist $\mathfrak{A}_\omega := \bigcup_{n < \omega} \mathfrak{A}_n = (\omega, \leq)$ und es gilt $\mathfrak{A}_n \models \varphi$ für alle $n < \omega$, aber $\mathfrak{A}_\omega \not\models \varphi$. \square

Satz 1.3. Π_2 -Formeln bleiben erhalten unter Vereinigung von Ketten.

Beweis. Sei $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ für eine Signatur τ eine Π_2 -Formel, also $\varphi(\bar{x}) = \forall \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ für eine Σ_1 -Formel $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{FO}(\tau)$. Sei weiter $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta < \alpha}$ eine Kette von τ -Strukturen und sei $\mathfrak{A} = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta$. Nun sei $\bar{a} \subseteq A_0$ mit $\mathfrak{A} \not\models \varphi(\bar{a})$. Dann gibt es ein $\bar{b} = (b_0, \dots, b_n) \in A^n$ für ein $n < \omega$ mit $\mathfrak{A} \models \neg \psi(\bar{a}, \bar{b})$. Da \bar{b} ein endliches Tupel ist, gibt es ein $\beta < \alpha$ mit $\bar{b} \subseteq A_\beta$. Da $\neg \psi$ äquivalent ist zu einer Π_1 -Formel folgt mit Bemerkung 1.3 und Korollar 1.1, dass $\mathfrak{A}_\beta \models \neg \psi(\bar{a}, \bar{b})$, also $\mathfrak{A}_\beta \not\models \varphi(\bar{x})$ gilt. \square

Elementare Substrukturen und Diagramme

Definition 1.6. Sei τ eine Signatur und seien $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ zwei τ -Strukturen. Dann heißt \mathfrak{A} *elementare Substruktur* von \mathfrak{B} , wenn für jede Formel $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ und alle $\bar{a} \subseteq A$ genau dann $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$ gilt, wenn auch $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ gilt. Wir schreiben dann $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Bemerkung 1.5. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Strukturen mit $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, so gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Definition 1.7. Eine Kette $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta < \alpha}$ von τ -Strukturen heißt *elementare Kette*, wenn $\mathfrak{A}_\delta \preceq \mathfrak{A}_\gamma$ für alle $\delta < \gamma < \alpha$ gilt.

Bemerkung 1.6. Sind $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ zwei τ -Strukturen, so dass für alle $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ und alle $\bar{a} \subseteq A$ aus $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ folgt, dass $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$ gilt oder für alle $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ und alle $\bar{a} \subseteq A$ aus $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$ folgt, dass $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ gilt, so gilt bereits $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Beweis. Nehmen wir an, für jede Formel $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ und alle $\bar{a} \subseteq A$ folgt aus $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, dass auch $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$ gilt. Seien nun $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ und $\bar{a} \subseteq A$ beliebig mit $\mathfrak{A} \not\models \varphi(\bar{x})$, das heißt $\mathfrak{A} \models \neg \varphi(\bar{a})$. Damit folgt $\mathfrak{B} \models \neg \varphi(\bar{a})$, das heißt $\mathfrak{B} \not\models \varphi(\bar{a})$. Gilt die andere Bedingung, so schließt man völlig analog. \square

Definition 1.8. Sei τ eine Signatur und sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur. Für $B \subseteq A$ setzen wir $\mathfrak{A}_B := (A, \tau^{\mathfrak{A}}, (b)_{b \in B})$, das heißt \mathfrak{A}_B ist die Expansion von \mathfrak{A} um je eine Konstante b für jedes $b \in B$. Die Theorie $\text{Th}(\mathfrak{A}_A)$ heißt *elementares Diagramm* von \mathfrak{A} .

Bemerkung 1.7. Sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur für eine Signatur τ und $B \subseteq A$. Dann ist $\text{Th}(\mathfrak{A}_B) = \{\varphi(\bar{b}) \mid \varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau), \bar{b} \subseteq B, \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{b})\}$.

Man beachte, dass wir hier b sowohl für die Symbole der erweiterten Signatur, als auch für die Interpretationen dieser Symbole in der entsprechenden Struktur, das heißt die Elemente der Menge B , schreiben. Außerdem beachte man, dass wir oft $\varphi = \varphi(\bar{b})$ für Formeln $\varphi \in FO(\tau \cup (b)_{b \in B})$ schreiben um anzudeuten, dass \bar{b} genau diejenigen Konstantensymbole aus B sind, die in φ vorkommen. Da wir ein Konstantensymbol b der erweiterten Signatur gerade mit dem Element $b \in B$ interpretieren, ist $\mathfrak{A}_B \models \varphi$. (Manchmal schreiben wir auch $\mathfrak{A}_B \models \varphi(\bar{b})$, semantisch natürlich gleichbedeutend mit $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{b})$, wobei wir dann \bar{b} als eine Belegung der freien Variablen in $\varphi(\bar{x}) \in FO(\tau)$ mit Elementen aus $B \subseteq A$ betrachten.)

Definition 1.9. Sei \mathfrak{A} eine Struktur. Dann heißt $D(\mathfrak{A}) = \{\varphi(\bar{a}) \in Th(\mathfrak{A}_A) \mid \varphi(\bar{a}) \text{ ist atomar oder negiert atomar}\}$ das *atomare Diagramm* von \mathfrak{A} .

Bemerkung 1.8. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ -Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.
- (2) Für jede endliche Teilmenge $A' \subseteq A$ ist $\mathfrak{A}_{A'} \equiv \mathfrak{B}_{A'}$.
- (3) $\mathfrak{A}_A \equiv \mathfrak{B}_A$.
- (4) $Th(\mathfrak{A}_A) = Th(\mathfrak{B}_A)$.
- (5) $\mathfrak{B}_A \models Th(\mathfrak{A}_A)$.

Beweis. Gelte zunächst (1) und sei $A' \subseteq A$ endlich. Sei nun $\varphi = \varphi(\bar{a}) \in FO(\tau \cup (a)_{a \in A'})$, das heißt $\varphi(\bar{x}) \in FO(\tau)$ und $\bar{a} \subseteq A'$. Dann ist $\mathfrak{A}_{A'} \models \varphi$ äquivalent zu $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, was wegen $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ genau dann gilt, wenn auch $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$ gilt. Dies bedeutet gerade $\mathfrak{B}_{A'} \models \varphi$, also gilt (2).

Gelte nun (3) nicht. Dann gibt es also einen Satz $\varphi = \varphi(\bar{a}) \in FO(\tau \cup (a)_{a \in A})$ für den o.B.d.A. $\mathfrak{A}_A \models \varphi$ und $\mathfrak{B}_A \not\models \varphi$ gilt. Sei nun $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und sei $A' := \{a_1, \dots, a_n\}$. Dann haben wir $\varphi \in FO(\tau \cup (a)_{a \in A'})$, also gilt $\mathfrak{A}_{A'} \models \varphi$ und $\mathfrak{B}_{A'} \not\models \varphi$. Also ist $\mathfrak{A}_{A'} \not\equiv \mathfrak{B}_{A'}$ und folglich gilt (2) nicht. Die Schlüsse von (3) auf (4) und von (4) auf (5) sind jeweils trivial.

Gelte nun schließlich (5) und seien $\varphi(\bar{x}) \in FO(\tau)$ und $\bar{a} \subseteq A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, das heißt $\varphi(\bar{a}) \in Th(\mathfrak{A}_A)$. Wegen $\mathfrak{B}_A \models Th(\mathfrak{A}_A)$ gilt damit $\mathfrak{B}_A \models \varphi(\bar{a})$, das heißt $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$. \square

Satz 1.4. (*Tarski-Vaught-Test*) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ -Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Dann gilt genau dann $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, wenn für jede Formel $\varphi(\bar{x}, y) \in FO(\tau)$ und alle $\bar{a} \subseteq A$ aus $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)$ folgt, dass bereits $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}, a)$ für ein $a \in A$ gilt.

Beweis. Gelte zunächst $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ und seien $\varphi(\bar{a}, y) \in FO(\tau)$ sowie $\bar{a} \subseteq A$ mit $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)$. Wegen $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ gilt dann $\mathfrak{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)$, also $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, a)$ für ein $a \in A$. Wiederum wegen $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ folgt hieraus $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}, a)$.

Sei nun das Kriterium des Tarski-Vaught Tests erfüllt und sei $\varphi(\bar{x}) \in FO(\tau)$. Wir zeigen per Induktion über den Aufbau von φ , dass für alle $\bar{a} \subseteq A$ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ gilt, wenn $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$ gilt. Zunächst bleiben quantorenfreie Formeln ($\Sigma_1 \cap \Pi_1$ -Formeln) nach Satz 1.2 und Korollar 1.1 unter Einbettungen und unter Substrukturen erhalten, also gilt die Behauptung für alle atomaren Formeln φ . Falls nun $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ für Formeln $\psi_1, \psi_2 \in FO(\tau)$ oder $\varphi = \neg \psi$ für eine Formel $\psi \in FO(\tau)$, so folgt die Behauptung sofort aus der Induktionsvoraussetzung.

Sei nun $\varphi(\bar{x}) = \exists y\psi(\bar{x}, y)$ für eine Formel $\psi(\bar{x}, y) \in \text{FO}(\tau)$ und gelte zunächst $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$. Dann gibt es also ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, a)$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{a}, a)$ und damit insbesondere $\mathfrak{B} \models \exists y\psi(\bar{a}, y)$. Gelte nun umgekehrt $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$. Dann gibt es also ein $b \in B$ mit $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{a}, b)$. Nach Voraussetzung gibt es folglich ein $a \in A$ mit $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{a}, a)$ und nach Induktionsvoraussetzung folgt hieraus $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, a)$. Damit haben wir $\mathfrak{A} \models \exists x\psi(\bar{a}, a) = \varphi(\bar{a})$. \square

Definition 1.10. Eine Abbildung $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ zwischen τ -Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} heißt *elementare Einbettung* ($f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$), wenn für alle Formeln $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ und alle $\bar{a} \subseteq A$ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ gilt, wenn auch $\mathfrak{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$ gilt.

Satz 1.5. Sei $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ eine Abbildung zwischen zwei τ -Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} . Dann gelten die folgenden Aussagen.

- (1) f ist genau dann eine Einbettung, wenn $\mathfrak{B}_{f(A)}$ ein Modell des atomaren Diagramms von \mathfrak{A} ist.
- (2) f ist genau dann eine elementare Einbettung, wenn $\mathfrak{B}_{f(A)}$ ein Modell des elementaren Diagramms von \mathfrak{A} ist.

Beweis. (1) Sei zunächst f eine Einbettung und sei $\varphi(\bar{a}) \in \text{Th}(\mathfrak{A}_A)$ atomar oder negiert atomar. Dann ist $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ insbesondere eine Σ_1 -Formel, also folgt aus Satz 1.2, dass $\mathfrak{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$ gilt, das heißt $\mathfrak{B}_{f(A)} \models \varphi(f(\bar{a}))$.

Nun gelte $\mathfrak{B}_{f(A)} \models D(\mathfrak{A})$. Zunächst ist f injektiv, denn sind $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$, so gilt $\mathfrak{A} \models a \neq a'$, also folgt $\mathfrak{B} \models f(a) \neq f(a')$ und also gilt $f(a) \neq f(a')$. Außerdem gilt $f(g^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = g^{\mathfrak{B}}(f(a_1), \dots, f(a_n))$ für jedes n -stellige Funktionssymbol $g \in \tau$, $n \in \mathbb{N}$ und alle $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$. Denn ist $a \in A$ mit $g^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = a$, so gilt $\mathfrak{A} \models g(a_1, \dots, a_n) = a$, also folgt $\mathfrak{B} \models g(f(a_1), \dots, f(a_n)) = f(a)$ und wegen $f(a) = f(g^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n))$ folgt die Behauptung. Schließlich gilt auch für jedes n -stellige Relationensymbol $R \in \tau$, $n \in \mathbb{N}$ und alle $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ genau dann $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$, wenn auch $(f(a_1), \dots, f(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$ gilt, da $\mathfrak{A} \models R(a_1, \dots, a_n)$ genau dann gilt, wenn auch $\mathfrak{B} \models R(f(a_1), \dots, f(a_n))$ gilt.

(2) Sei zunächst f eine elementare Einbettung und sei $\varphi(\bar{a}) \in \text{Th}(\mathfrak{A}_A)$. Dann ist $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$, $\bar{a} \subseteq A$ und $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, also gilt nach Definition einer elementaren Einbettung, dass $\mathfrak{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$ gilt. Also ist $\mathfrak{B}_{f(A)} \models \text{Th}(\mathfrak{A}_A)$.

Gelte nun $\mathfrak{B}_{f(A)} \models \text{Th}(\mathfrak{A}_A)$ und seien $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ sowie $\bar{a} \subseteq A$. Gilt dann $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, also $\varphi(\bar{a}) \in \text{Th}(\mathfrak{A}_A)$, so folgt $\mathfrak{B}_{f(A)} \models \varphi(f(\bar{a}))$, also $\mathfrak{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$. Gilt umgekehrt $\mathfrak{A} \not\models \varphi(\bar{a})$, das heißt $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\bar{a})$, so folgt, wie wir gerade gesehen haben, $\mathfrak{B} \models \neg\varphi(\bar{a})$, das heißt $\mathfrak{B} \not\models \varphi(\bar{a})$. Also ist f eine elementare Einbettung. \square

Satz 1.6. Sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur und sei $X \subseteq A$. Ferner sei \mathcal{K} die Menge aller Teilmengen B von A , so dass $X \subseteq B$ gilt und B das Universum einer Substruktur von \mathfrak{A} ist. Dann ist $Y := \bigcap \mathcal{K}$ das Universum einer Substruktur $\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}$ von \mathfrak{A} und $\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}$ ist die eindeutig bestimmste kleinste Substruktur von \mathfrak{A} , deren Universum X umfasst.

Dass $\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}$ die kleinste Substruktur von \mathfrak{A} ist, deren Universum X umfasst, bedeutet dabei, dass $Y \subseteq Y'$ gilt für jede Teilmenge $Y' \subseteq A$ mit $X \subseteq Y'$, so dass Y' das Universum einer Substruktur von \mathfrak{A} ist.

Definition 1.11. Für eine Struktur \mathfrak{A} und eine Menge $X \subseteq A$ heißt die Struktur $\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}$ die von X in \mathfrak{A} erzeugte Substruktur von \mathfrak{A} .

Bemerkung 1.9. Ist $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus zwischen τ -Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , so ist $f(A)$ das Universum einer Substruktur von \mathfrak{B} .

Wir bezeichnen diese Substruktur mit $f(\mathfrak{A})$. Offensichtlich ist $f(\mathfrak{A}) = \langle f(A) \rangle_{\mathfrak{B}}$. Ist ferner f eine Einbettung so gilt $f(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{A}$.

Bemerkung 1.10. Eine Einbettung $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ zwischen τ -Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ist genau dann eine elementare Einbettung, wenn $f(\mathfrak{A}) \preceq \mathfrak{B}$ ist.

Beweis. Sei zunächst f eine elementare Einbettung und sei $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ sowie $\bar{b} \subseteq f(A)$. Dann haben wir $\bar{b} = f(\bar{a})$ für ein $\bar{a} \subseteq A$. Wegen $\mathfrak{A} \cong f(\mathfrak{A})$ gilt damit nun $f(\mathfrak{A}) \models \varphi(\bar{b})$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, was nach Voraussetzung äquivalent ist zu $\mathfrak{B} \models \varphi(f(\bar{a})) = \varphi(\bar{b})$.

Gelte nun umgekehrt $f(\mathfrak{A}) \preceq \mathfrak{B}$ und sei $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ sowie $\bar{a} \subseteq A$. Dann ist $f(\bar{a}) \subseteq f(A)$, also folgt aus $\mathfrak{A} \cong f(\mathfrak{A})$, dass $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ genau dann gilt, wenn $f(\mathfrak{A}) \models \varphi(f(\bar{a}))$ gilt, was nach Voraussetzung äquivalent ist zu $\mathfrak{B} \models \varphi(f(\bar{a}))$. \square

2 Amalgamation

Amalgamationssätze haben grob gesprochen die folgende Form. Gegeben seien zwei Modelle \mathfrak{B} und \mathfrak{C} einer Theorie T und eine Struktur \mathfrak{A} (die nicht notwendigerweise ein Modell von T ist), so dass \mathfrak{A} in \mathfrak{B} und in \mathfrak{C} eingebettet ist. Dann gibt es unter gewissen Voraussetzungen ein Modell \mathfrak{D} von T , so dass \mathfrak{B} und \mathfrak{C} in \mathfrak{D} einbettbar sind, vermöge zweier Einbettungen f und g , die auf \mathfrak{A} übereinstimmen:

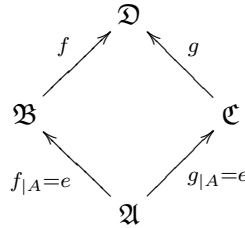


Abbildung 1: Amalgamation

Sätze dieser Form geben uns die Möglichkeit, gegebene Modelle einer Theorie zu einem Modell dieser Theorie zu amalgamieren, welches beide Modelle umfasst. Voraussetzung ist dabei, dass diese Modelle über die Sätze der Theorie T hinaus eine gewisse minimale Gemeinsamkeit haben, welche durch die in beide Modelle einbettbare Struktur \mathfrak{A} gegeben ist. Betrachtet man zum Beispiel Modelle \mathfrak{B} und \mathfrak{C} der Theorie der Körper, so müssen \mathfrak{B} und \mathfrak{C} in diesem Fall notwendigerweise die gleiche Charakteristik besitzen. (Man beachte, dass eine Struktur mit der Signatur $\tau_{kp} = \{+, \cdot, 0, 1, -, ^{-1}\}$ von Körpern, welche in einen Körper einbettbar ist, selbst wieder ein Körper ist.) Durch sukzessives Amalgamieren kann man dann immer komplexere Modelle einer bestimmten Theorie konstruieren.

Wir werden das Konzept der Amalgamation in verschiedenen Varianten kennenlernen und anwenden. Wir werden es verwenden, um den Satz von Los-Tarski zu beweisen und um Strukturen zu konstruieren, in denen gewisse Typen realisiert sind, siehe Abschnitt 3. Wir beweisen nun zunächst den Satz über die elementare Amalgamation. Anschließend betrachten wir zwei einfache Folgerungen aus diesem Satz und werden dann den Satz über die existentielle Amalgamation beweisen.

Wir verwenden im Folgenden implizit oft das Koinzidenzlemma der Prädikatenlogik.

Lemma 2.1. (*Koinzidenzlemma*) Seien $\psi \in \text{FO}(\sigma \cap \tau)$ eine Formel, (\mathfrak{A}, β) eine σ -Interpretation und (\mathfrak{A}', β') eine τ -Interpretation, so dass Folgendes gilt.

- (1) \mathfrak{A} und \mathfrak{A}' haben das gleiche $(\tau \cap \sigma)$ -Redukt.
- (2) $\text{Frei}(\psi) \subseteq \text{Def}(\beta) \cap \text{Def}(\beta')$ und $\beta(x) = \beta'(x)$ für alle $x \in \text{Frei}(\psi)$.

Dann gilt $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$ genau dann, wenn $(\mathfrak{A}', \beta') \models \psi$ gilt.

Bevor wir nun den Satz über die elementare Amalgamation beweisen, wollen wir uns noch einige Aussagen über Erzeugendensysteme ansehen, die wir im Folgenden verwenden werden.

Wir wissen bereits, dass eine Abbildung $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ zwischen τ -Strukturen genau dann eine Einbettung ist, wenn $\mathfrak{B}_{f(A)}$ ein Modell des atomaren Diagramms von \mathfrak{A} ist. Wir wollen uns nun zunächst ein entsprechendes Resultat ansehen, wobei wir lediglich von einem Erzeugendensystem einer Struktur ausgehen. Dazu geben wir zunächst eine explizite Konstruktion für das Erzeugnis einer Menge in einer Struktur an.

Bemerkung 2.1. Sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur für eine Signatur τ und sei $B \subseteq A$. Wir definieren die Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen $B_n \subseteq A$ wie folgt.

$$B_0 := B.$$

$$B_{n+1} := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{f \in F^m(\tau)} \{f^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_m) \mid (b_1, \dots, b_m) \in (B_n)^m\} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $B^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ das Universum von $\langle B \rangle_{\mathfrak{A}}$.

Wir nehmen nun o.B.d.A. an, dass $\tau \cap B = \emptyset$ ist. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $b \in B_n$ einen geschlossenen Term t der Tiefe n über der Signatur $\tau \cup B$, so dass $\llbracket t \rrbracket^{\mathfrak{A}_B} = b$ ist. Dies gestattet es uns, Aussagen über logische Formeln, die lediglich von Erzeugendensystemen ausgehen, anzuheben zu Aussagen über die erzeugten Substrukturen.

Bemerkung 2.2. Seien \mathfrak{A} und \mathfrak{B} τ -Strukturen für eine Signatur τ , sei \bar{c} ein Tupel von Konstantensymbolen mit $\bar{c} \cap \tau = \emptyset$ und seien $\bar{a} \subseteq A$ sowie $\bar{b} \subseteq B$ mit $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}|$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) Für jeden atomaren oder negiert atomaren Satz $\varphi \in \text{FO}(\tau \cup \bar{c})$ folgt aus $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \models \varphi$, dass auch $(\mathfrak{B}, \bar{a}) \models \varphi$ gilt.
- (2) Es gibt eine Einbettung $f : \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathfrak{B}$ mit $f(\bar{a}) = \bar{b}$.

In jedem Fall gibt es höchstens eine solche Einbettung.

Man beachte, dass damit insbesondere $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \cong \langle \bar{b} \rangle_{\mathfrak{B}}$ gilt. Ein entsprechendes Resultat gilt auch für Homomorphismen, wenn man (1) lediglich für atomare Sätze fordert.

Bemerkung 2.3. *Es seien \mathfrak{B} und \mathfrak{C} τ -Strukturen sowie $\bar{a} \subseteq B$ und $\bar{c} \subseteq C$ Tupel gleicher Länge, so dass $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \equiv \mathfrak{C}_{\bar{c}}$. Ist dann $f : \mathfrak{A} := \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{B}} \rightarrow \langle \bar{c} \rangle_{\mathfrak{C}}$ ein Isomorphismus mit $f(\bar{a}) = \bar{c}$, so gilt bereits $\mathfrak{B}_A \equiv \mathfrak{C}_{f(A)}$.*

Beweis. Da f ein Isomorphismus ist mit $f(\bar{a}) = \bar{c}$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\bar{c} = \bar{a}$ und $\langle \bar{c} \rangle_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{A}$ gilt, indem wir gegebenenfalls zu einer isomorphen Kopie von \mathfrak{C} übergehen. Es ist dann f die Identität auf \mathfrak{A} . Sei nun $\varphi = \varphi(a_1, \dots, a_n) \in \text{FO}(\tau \cup A)$ ein beliebiger Satz über der erweiterten Signatur $\tau \cup A$, wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass $\tau \cap A = \emptyset$ ist. Wegen $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A} = \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{C}}$, gibt es dann für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ einen geschlossenen Term t_i über der Signatur $\tau \cup \bar{a}$, so dass $\llbracket t_i \rrbracket^{\mathfrak{B}_{\bar{a}}} = \llbracket a_i \rrbracket^{\mathfrak{B}_A} = \llbracket a_i \rrbracket^{\mathfrak{A}_A} = \llbracket a_i \rrbracket^{\mathfrak{C}_A} = \llbracket t_i \rrbracket^{\mathfrak{C}_{\bar{a}}}$ gilt. Wir konstruieren nun die Formel $\psi \in \text{FO}(\tau \cup \bar{a})$ aus φ , indem wir für $i = 1, \dots, n$ alle Vorkommen von a_i in φ durch t_i ersetzen. Nach Voraussetzung gilt dann $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \models \psi$ genau dann, wenn $\mathfrak{C}_{\bar{a}} \models \psi$ gilt und also gilt offensichtlich auch $\mathfrak{B}_A \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{C}_A \models \varphi$ gilt. \square

Satz 2.1. *(Elementare Amalgamation) Seien \mathfrak{B} und \mathfrak{C} τ -Strukturen sowie $\bar{a} \subseteq B$ und $\bar{c} \subseteq C$ Tupel gleicher Länge, so dass $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \equiv \mathfrak{C}_{\bar{c}}$ gilt. Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$ und eine elementare Einbettung $f : \mathfrak{C} \preceq \mathfrak{D}$ mit $f(\bar{c}) = \bar{a}$.*

Beweis. Wegen $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \equiv \mathfrak{C}_{\bar{c}}$ gibt es eine eindeutige Einbettung $g : \mathfrak{A} := \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{B}} \rightarrow \mathfrak{C}$ mit $g(\bar{a}) = \bar{c}$. Indem wir gegebenenfalls zu einer isomorphen Kopie von \mathfrak{C} übergehen, können wir also zunächst o.B.d.A. annehmen, dass $\bar{a} = \bar{c}$, $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{A}$ und $B \cap C = A$ gilt. Wir wie zuvor bemerkt haben, haben wir damit bereits $\mathfrak{B}_A \equiv \mathfrak{C}_A$. Wir zeigen nun, dass $T := \text{Th}(\mathfrak{B}_B) \cup \text{Th}(\mathfrak{C}_C)$ erfüllbar ist. Sei dazu $T_0 \subseteq T$ eine beliebige endliche Teilmenge von T und sei $\varphi := \bigwedge (T_0 \cap \text{Th}(\mathfrak{C}_C))$. Da in φ nur endlich viele Konstanten vorkommen und $B \cap C = A$ ist, gibt es endliche Tupel $\bar{a}' \subseteq A$ und $\bar{c}' \subseteq C \setminus A = C \setminus B$ mit $\varphi = \varphi(\bar{a}', \bar{c}')$.

Nehmen wir nun an, T_0 ist nicht erfüllbar. Da $\mathfrak{B}_B \models T_0 \cap \text{Th}(\mathfrak{B}_B)$ gilt, folgt $\text{Th}(\mathfrak{B}_B) \not\models \varphi(\bar{a}', \bar{c}')$, das heißt $\text{Th}(\mathfrak{B}_B) \models \neg \varphi(\bar{a}', \bar{c}')$. Da nun aber $\bar{c}' \cap B = \emptyset$ ist, folgt daraus bereits $\mathfrak{B}_B \models \forall \bar{x} \neg \varphi(\bar{a}', \bar{x})$. (Sonst gäbe es ein Tupel $\bar{b}' \subseteq B$ mit $\mathfrak{B}_B \models \varphi(\bar{a}', \bar{b}')$, also wäre $\mathfrak{B}' = (\mathfrak{B}_B, (\bar{c}')^{\mathfrak{B}'})$ mit $(\bar{c}')^{\mathfrak{B}'} = \bar{b}'$ ein Modell von $\text{Th}(\mathfrak{B}_B) \cup \{\varphi(\bar{a}', \bar{c}')\}$, im Widerspruch zu $\text{Th}(\mathfrak{B}_B) \models \neg \varphi(\bar{a}', \bar{c}')$.) Also haben wir $\mathfrak{B}_A \models \forall \bar{x} \neg \varphi(\bar{a}', \bar{x})$ und wegen $\mathfrak{B}_A \equiv \mathfrak{C}_A$ folgt hieraus $\mathfrak{C}_A \models \forall \bar{x} \neg \varphi(\bar{a}', \bar{x})$ und damit haben wir $\mathfrak{C}_C \models \forall \bar{x} \neg \varphi(\bar{a}', \bar{x})$, im Widerspruch zu $\varphi(\bar{a}', \bar{c}') \in \text{Th}(\mathfrak{C}_C)$.

Nach dem Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik ist somit auch T erfüllbar, das heißt es gibt ein Modell $\mathfrak{D}^+ = (\mathfrak{D}, B^{\mathfrak{D}^+}, C^{\mathfrak{D}^+}) \models T$ von T , wobei \mathfrak{D} eine Struktur der Signatur τ ist. Damit gilt $(\mathfrak{D}, B^{\mathfrak{D}^+}) \models \text{Th}(\mathfrak{B}_B)$, also ist $g : B \rightarrow B^{\mathfrak{D}^+}$, $b \mapsto b^{\mathfrak{D}^+}$ eine elementare Einbettung. Durch Umbenennen können wir also o.B.d.A. annehmen, dass $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{D}$ und $b^{\mathfrak{D}^+} = b$ für alle $b \in B$ gilt. Da weiter $(\mathfrak{D}, C^{\mathfrak{D}^+}) \models \text{Th}(\mathfrak{C}_C)$ gilt, ist auch $f : C \rightarrow C^{\mathfrak{D}^+}$, $c \mapsto c^{\mathfrak{D}^+}$ eine elementare Einbettung und es gilt $f(a) = a^{\mathfrak{D}^+} = a$ für alle $a \in \bar{a} \subseteq B$. \square

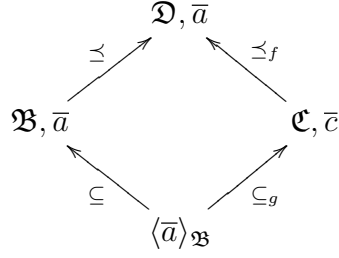


Abbildung 2: Elementare Amalgamation

Korollar 2.1. *Sind \mathfrak{B} und \mathfrak{C} τ -Strukturen mit $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$, so gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$ und eine elementare Einbettung $f : \mathfrak{C} \preceq \mathfrak{D}$.*

Für den Beweis setze man lediglich im Satz über die elementare Amalgamation $\bar{a} = \bar{c} = \emptyset$. Falls nun also τ keine Konstantensymbole enthält, so ist die Struktur \mathfrak{A} , welche in \mathfrak{B} und \mathfrak{C} eingebettet ist, die leere Struktur. (Sonst ist $\langle \emptyset \rangle_{\mathfrak{B}} = \langle C^{\mathfrak{B}} \rangle_{\mathfrak{B}}$, wobei C die Menge der Konstantensymbole in τ ist.) Zwar garantiert diese leere Struktur keinerlei Gemeinsamkeiten zwischen den Strukturen \mathfrak{B} und \mathfrak{C} , aber wie wir im Beweis des Satzes über die elementare Amalgamation gesehen haben, ist die Forderung $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$ stark genug, um \mathfrak{B} und \mathfrak{C} amalgamieren zu können. (Man beachte, dass dies eine echt stärkere Forderung ist als $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$ für eine Theorie T , falls T unvollständig ist.)

Korollar 2.2. *Sind \mathfrak{A} , \mathfrak{B} und \mathfrak{C} τ -Strukturen mit $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$, so gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$ und eine elementare Einbettung $f : \mathfrak{C} \preceq \mathfrak{D}$, so dass $f|_A = \text{id}_A$.*

Beweis. Sei $\bar{a} = (a_\gamma)_{\gamma < \kappa}$ für eine geeignete Kardinalzahl κ eine Aufzählung von A . Wegen $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$ gilt dann $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \equiv \mathfrak{C}_{\bar{a}}$. (Denn ist $\varphi \in \text{Th}(\mathfrak{B}_{\bar{a}})$, so folgt aus $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt und mit $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$ gilt dann auch $\mathfrak{C}_{\bar{a}} \models \varphi$.) Damit folgt die Behauptung nun sofort aus dem Amalgamationsatz. \square

Satz 2.2. *(Existentielle Amalgamation) Seien \mathfrak{B} und \mathfrak{C} τ -Strukturen sowie $\bar{a} \subseteq B$ ein Tupel und $f : \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{B}} \rightarrow \mathfrak{C}$ ein Homomorphismus, so dass für alle Σ_1 -Sätze $\varphi \in \text{FO}(\tau \uplus \bar{a})$ aus $\mathfrak{C}_{f(\bar{a})} \models \varphi$ folgt, dass auch $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \models \varphi$ gilt. Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$ und eine Einbettung $g : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ mit $g(f(\bar{a})) = \bar{a}$.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{A} := \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{B}}$ und zeigen zunächst, dass $\mathfrak{C}_{f(A)}$ ein Modell des atomaren Diagramms $D(\mathfrak{A})$ von \mathfrak{A} ist. Sei also $\varphi \in \text{FO}(\tau \uplus A)$ atomar oder negiert atomar mit $\mathfrak{A}_A \models \varphi$. Wie im Beweis von Bemerkung 2.3 konstruieren wir nun einen Satz $\psi \in \text{FO}(\tau \uplus \bar{a})$, indem wir für jedes $a \in A$ welches in φ vorkommt, alle Vorkommen von a durch einen geeigneten Term t_a über der Signatur $\tau \uplus \bar{a}$ ersetzen. Dann haben wir $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \models \psi$ und da ψ quantorenfrei ist, folgt $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \models \psi$. Nutzen wir nun abermals aus, dass ψ quantorenfrei ist, so erhalten wir nach Voraussetzung $\mathfrak{C}_{f(\bar{a})} \models \psi$ und da f ein Homomorphismus ist, folgt damit $\mathfrak{C}_{f(A)} \models \varphi$. Also haben wir $\mathfrak{C}_{f(A)} \models D(\mathfrak{A})$ und also ist f eine Einbettung. Indem wir \mathfrak{C} gegebenenfalls durch eine isomorphe Kopie ersetzen, können wir also annehmen, dass $f(a) = a$ für alle

$a \in A$ gilt und dass $B \cap C = A$ ist. Mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Bemerkung 2.3 zeigt man nun, dass für alle Σ_1 -Sätze $\varphi \in \text{FO}(\tau \uplus A)$ aus $\mathfrak{C}_A \models \varphi$ folgt, dass auch $\mathfrak{B}_A \models \varphi$ gilt. Wir zeigen nun, dass $T := \text{Th}(\mathfrak{B}_B) \cup D(\mathfrak{C})$ erfüllbar ist, wobei $D(\mathfrak{C})$ das atomare Diagramm von \mathfrak{C} sei.

Sei dazu $T_0 \subseteq T$ endlich und sei $\varphi := \bigwedge (T_0 \cap D(\mathfrak{C}))$. Da in φ nur endlich viele Konstanten vorkommen und $B \cap C = A$ ist, gibt es endliche Tupel $\bar{a}' \subseteq A$ und $\bar{c}' \subseteq C \setminus A = C \setminus B$ mit $\varphi = \varphi(\bar{a}', \bar{c}')$. Nehmen wir nun an, T_0 ist nicht erfüllbar. Da $\mathfrak{B}_B \models T_0 \cap \text{Th}(\mathfrak{B}_B)$ gilt, folgt $\text{Th}(\mathfrak{B}_B) \not\models \varphi(\bar{a}', \bar{c}')$, das heißt $\text{Th}(\mathfrak{B}_B) \models \neg\varphi(\bar{a}', \bar{c}')$. Da nun aber $\bar{c}' \cap B = \emptyset$ ist, folgt daraus bereits $\mathfrak{B}_B \models \forall \bar{x} \neg\varphi(\bar{a}', \bar{x})$. (Denn sonst gäbe es ein Tupel $\bar{b}' \subseteq B$ mit $\mathfrak{B}_B \models \varphi(\bar{a}', \bar{b}')$. Damit wäre $\mathfrak{B}' = (\mathfrak{B}_B, (\bar{c}')^{\mathfrak{B}'})$ mit $(\bar{c}')^{\mathfrak{B}'} = \bar{b}'$ ein Modell von $\text{Th}(\mathfrak{B}_B) \cup \{\varphi(\bar{a}', \bar{c}')\}$, im Widerspruch zu $\text{Th}(\mathfrak{B}_B) \models \neg\varphi(\bar{a}', \bar{c}')$.) Also haben wir $\mathfrak{B}_A \models \forall \bar{x} \neg\varphi(\bar{a}', \bar{x}) \equiv \neg\exists \bar{x} \varphi(\bar{a}', \bar{x})$ und also $\mathfrak{B}_A \not\models \exists \bar{x} \varphi(\bar{a}', \bar{x})$. Nun ist $\varphi(\bar{a}', \bar{x})$ quantorenfrei, also ist $\exists \bar{x} \varphi(\bar{a}', \bar{x})$ eine Σ_1 -Formel und damit folgt aus $\mathfrak{B}_A \not\models \exists \bar{x} \varphi(\bar{a}', \bar{x})$, dass $\mathfrak{C}_A \not\models \exists \bar{x} \varphi(\bar{a}', \bar{x})$ gilt. Daraus folgt nun $\mathfrak{C}_C \not\models \exists \bar{x} \varphi(\bar{a}', \bar{x})$ im Widerspruch zu $\varphi(\bar{a}', \bar{c}') \in D(\mathfrak{C})$.

Nach dem Kompaktheitssatz ist somit auch T erfüllbar, also gibt es ein Modell $\mathfrak{D}^+ = (\mathfrak{D}, B^{\mathfrak{D}^+}, C^{\mathfrak{D}^+}) \models T$ von T , wobei \mathfrak{D} eine τ -Struktur ist. Dann gilt $(\mathfrak{D}, B^{\mathfrak{D}^+}) \models \text{Th}(\mathfrak{B}_B)$, also ist $h : B \rightarrow D$, $b \mapsto b^{\mathfrak{D}^+}$ eine elementare Einbettung. Indem wir gegebenenfalls zu einer isomorphen Kopie von \mathfrak{D}^+ übergehen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{D}^+$ und $b^{\mathfrak{D}^+} = b$ für alle $b \in B$ gilt. Da weiter $(\mathfrak{D}, C^{\mathfrak{D}^+}) \models D(\mathfrak{C})$ gilt, ist $f : C \rightarrow D$, $c \mapsto c^{\mathfrak{D}^+}$ eine Einbettung und es gilt $g(f(a)) = f(a) = a^{\mathfrak{D}^+} = a$ für alle $a \in A$. \square

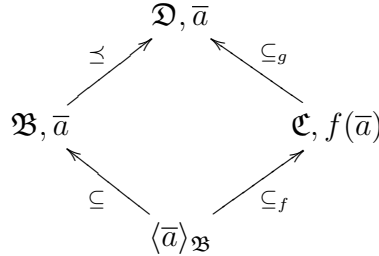


Abbildung 3: Existentielle Amalgamation

Mit Hilfe des folgenden Korollars aus dem Satz über die existentielle Amalgamation können wir nun den Satz von Łos-Tarski in seiner allgemeinen Form beweisen. Das Korollar ergibt sich unmittelbar wenn man $\bar{a} = \emptyset$ setzt

Korollar 2.3. *Seien \mathfrak{B} und \mathfrak{C} τ -Strukturen, so dass für jeden Σ_1 -Satz $\varphi \in \text{FO}(\tau)$ aus $\mathfrak{C} \models \varphi$ folgt, dass $\mathfrak{B} \models \varphi$ gilt. Dann kann man \mathfrak{C} in eine elementare Erweiterung von \mathfrak{B} einbetten.*

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}(\tau)$ für eine Signatur τ eine Menge von τ -Sätzen. Wir definieren die folgenden Satzmenge.

$$\Phi_{\forall} := \{\varphi \in \text{FO}(\tau) \mid \varphi \text{ ist ein } \Pi_1\text{-Satz mit } \Phi \models \varphi\}.$$

$$\Phi_{\exists} := \{\varphi \in \text{FO}(\tau) \mid \varphi \text{ ist ein } \Sigma_1\text{-Satz mit } \Phi \models \varphi\}.$$

Korollar 2.4. *Sei $T \subseteq FO(\tau)$ für eine Signatur τ eine Theorie und sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur. Dann gilt genau dann $\mathfrak{A} \models T_V$, wenn es eine Erweiterung $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ gibt mit $\mathfrak{B} \models T$.*

Beweis. Gibt es eine Erweiterung $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ von \mathfrak{A} mit $\mathfrak{B} \models T$, so gilt insbesondere $\mathfrak{B} \models T_V$ und da universelle Formeln unter Substrukturen erhalten bleiben, folgt $\mathfrak{A} \models T_V$.

Gele nun $\mathfrak{A} \models T_V$. Wir zeigen, dass es ein Modell \mathfrak{B} von $\Phi := \text{Th}(\mathfrak{A})_{\exists} \cup T$ gibt. Dann gilt nämlich für jeden Σ_1 -Satz $\varphi \in FO$, dass aus $\mathfrak{A} \models \varphi$ folgt, dass $\mathfrak{B} \models \varphi$ gilt. Nach Korollar 2.3 ist dann \mathfrak{A} in eine elementare Erweiterung von \mathfrak{B} einbettbar, das heißt \mathfrak{A} ist isomorph zu einer Substruktur eines Modells von T . Nehmen wir dazu an, Φ wäre nicht erfüllbar. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}\} \subseteq \text{Th}(\mathfrak{A})_{\exists}$ mit $T \models \neg\varphi_0 \vee \dots \vee \neg\varphi_{k-1} =: \psi \in \Pi_1$. Damit haben wir $\psi \in T_V$ und also $\mathfrak{A} \models \psi$ im Widerspruch zu $\mathfrak{A} \models \varphi_i$ für $i = 0, \dots, k-1$. \square

Satz 2.3. *(Los-Tarski) Sei $T \subseteq FO(\tau)$ für eine Signatur τ eine Theorie und sei $\Phi \subseteq FO(\tau)$ eine Menge von Sätzen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) *Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ Modelle von T mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \models \Phi$, so gilt auch $\mathfrak{A} \models \Phi$. (Φ bleibt modulo T unter Substrukturen erhalten.)*
- (2) *Es gibt eine Menge $\Psi \subseteq FO(\tau)$ von Π_1 -Sätzen, so dass für jedes Modell $\mathfrak{A} \models T$ genau dann $\mathfrak{A} \models \Phi$ gilt, wenn auch $\mathfrak{A} \models \Psi$ gilt. (Φ ist modulo T zu einer Menge von Π_1 -Sätzen äquivalent.)*

Beweis. Den Schluss von (2) auf (1) erhält man unmittelbar aus der Tatsache, dass universelle Formeln unter Substrukturen erhalten bleiben. Gele nun also (1). Wir setzen $\Psi := (T \cup \Phi)_V$ und betrachten ein beliebiges Modell $\mathfrak{A} \models T$ von T . Gilt dann $\mathfrak{A} \models \Psi$, so liefert uns Korollar 2.4 eine τ -Struktur $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B} \models T \cup \Phi$ und da Φ modulo T unter Substrukturen erhalten bleibt, folgt hieraus $\mathfrak{A} \models \Phi$. Gilt umgekehrt $\mathfrak{A} \models \Phi$, so folgt $\mathfrak{A} \models T \cup \Phi \supseteq \Psi$. Also ist Φ modulo T zu Ψ äquivalent. Da Ψ nur aus Π_1 -Sätzen besteht, ist der Beweis damit vollständig erbracht. \square

Man beachte, dass die Einschränkung auf Sätze im vorigen Satz nicht essentiell ist. Denn ist $\Phi \subseteq FO(\tau)$ eine beliebige Menge von Formeln die modulo T abgeschlossen ist unter Substrukturen von τ -Strukturen und ist X die Menge der Variablen, die in Φ frei vorkommen, so betrachten wir X als eine Menge von Konstantensymbolen. Dabei nehmen wir o.B.d.A. an, dass $X \cap \tau = \emptyset$ ist. Dann ist also Φ eine Menge von $FO(\tau \cup X)$ -Sätzen und wie man leicht sieht ist Φ als solche modulo T abgeschlossen unter Substrukturen von $(\tau \cup X)$ -Strukturen. Man beachte dazu, dass nach dem Koinzidenzlemma eine $(\tau \cup X)$ -Struktur genau dann ein Modell von T ist, wenn ihr τ -Redukt ein Modell von T ist. Ferner beachte man, dass die Interpretation der Konstantensymbole aus X in einer Substruktur \mathfrak{B} einer $(\tau \cup X)$ -Struktur \mathfrak{A} übereinstimmen muss mit der Interpretation der Symbole in \mathfrak{A} . Insbesondere sind diese Elemente in B enthalten. Man erhält also aus dem Satz von Los-Tarski eine Menge Ψ von universellen $(\tau \cup X)$ -Sätzen, die modulo T zu Φ äquivalent ist. Wie man wiederum sehr leicht einsieht, ist dann Φ als Menge von τ -Formeln modulo T

äquivalent zu Ψ als Menge von τ -Formeln und wir sind fertig. Den Schluss von (2) auf (1) haben wir bereits für den allgemeinen Fall in Abschnitt 1 bewiesen.

Damit können wir nun leicht die Formulierung des Satzes Los-Tarski aus der Einleitung folgern.

Korollar 2.5. *Eine FO-Formel φ bleibt genau dann unter Substrukturen erhalten, wenn φ äquivalent zu einer universellen Formel ist.*

Da Negationen von Π_1 -Formeln gerade Σ_1 -Formeln sind, erhält man daraus unmittelbar, dass eine FO-Formel φ genau dann unter Einbettungen erhalten bleibt, wenn φ äquivalent zu einer existentiellen Formel ist. Es gilt jedoch allgemeiner auch eine entsprechende Variante des Satzes von Los-Tarski für existentielle Formeln, das heißt eine Menge Φ von FO(τ)-Formeln ist modulo einer τ -Theorie T abgeschlossen unter Einbettungen genau dann, wenn Φ modulo T äquivalent ist zu einer Menge von existentiellen Formeln. Der Beweis verwendet die gleichen Ideen wie der Beweis des Satzes von Los-Tarski.

Darüberhinaus gilt auch die Umkehrung von Satz 1.3, das heißt eine FO-Formel die unter Vereinigungen von Ketten erhalten bleibt, ist äquivalent zu einer Π_2 -Formel. Auch hier gilt allgemeiner, dass eine Menge Φ von FO(τ)-Formeln modulo einer τ -Theorie T abgeschlossen ist unter Vereinigungen von Ketten genau dann, wenn Φ modulo T äquivalent ist zu einer Menge von Π_2 -Formeln. Dieses Resultat ist bekannt als Satz von Chang-Los-Suszko. Für den Beweis verwendet man eine Variante der existentiellen Amalgamation.

3 Typen

Definition 3.1. Seien \mathfrak{A} eine τ -Struktur, $B \subseteq A$ und $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Ein n -Typ von \mathfrak{A} über B ist eine Menge p von Formeln $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1}) \in FO(\tau \cup B)$, so dass $p \cup \text{Th}(\mathfrak{A}_B)$ erfüllbar ist.
- (2) Der Typ eines Tupels $\bar{a} \subseteq A$ über B ist die Menge $\text{tp}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/B) = \{\varphi(\bar{x}) \in FO(\tau \cup B) \mid \mathfrak{A}_B \models \varphi(\bar{a})\}$.
- (3) \mathfrak{A} realisiert einen n -Typ p über B , wenn ein Tupel $\bar{a} \subseteq A$ existiert, so dass $p \subseteq \text{tp}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/B)$ ist.
- (4) Ein n -Typ p über B heißt vollständig, wenn kein n -Typ q von \mathfrak{A} über B existiert, so dass $p \subsetneq q$ gilt.
- (5) $S_{\mathfrak{A}}^n(B)$ ist die Menge aller vollständigen n -Typen von \mathfrak{A} über B (Stone-Raum).

Ein n -Typ einer τ -Struktur \mathfrak{A} über einer Menge $B \subseteq A$ ist somit eine partielle Beschreibung der Eigenschaften eines n -Tupels von Elementen über der Signatur $\tau \cup B$. Wir nennen B auch die Parameter des Typs. Wir fordern dabei nicht, dass diese Beschreibung auf ein n -Tupel von Elementen der Struktur \mathfrak{A} zutrifft, sondern lediglich, dass sie mit der Theorie $\text{Th}(\mathfrak{A}_B)$ der Struktur \mathfrak{A}_B konsistent ist. Das heißt, die Beschreibung muss zutreffen auf ein n -Tupel von Elementen eines Modells der Theorie. Trifft die Beschreibung auf ein Tupel von Elementen einer τ -Struktur \mathfrak{C} mit den Parametern $B \subseteq C$ zu, so sagen wir, dass \mathfrak{C} den Typ realisiert.

Vollständige Typen entsprechen gerade den vollständigen Beschreibungen eines Tupels von Elementen, eingeschlossen alle Aussagen, die man mit Hilfe der Parameter aus B über die gegebene Umgebung \mathfrak{A} des Tupels machen kann, das heißt $\text{Th}(\mathfrak{A}_B)$. (Man hat eine partielle Beschreibung p eines n -Tupels von Elementen gegeben, die mit $\text{Th}(\mathfrak{A}_B)$ konsistent ist und man kann nicht mehr über das Tupel sagen, ohne dass die Beschreibung inkonsistent wird mit $\text{Th}(\mathfrak{A}_B)$. Insbesondere gilt natürlich $\text{Th}(\mathfrak{A}_B) \subseteq p$.) Realisiert eine Struktur \mathfrak{C} einen vollständigen Typen p einer Struktur \mathfrak{A} über den Parametern A , so ist \mathfrak{C} bis auf Umbenennung eine elementare Erweiterung von \mathfrak{A} .

Bemerkung 3.1. *Sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur, $B \subseteq A$ und p ein n -Typ von \mathfrak{A} über B . Dann ist p genau dann vollständig, wenn für jede Formel $\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \text{FO}(\tau \cup B)$ entweder $\varphi(\bar{x}) \in p$ oder $\neg\varphi(\bar{x}) \in p$ gilt.*

Beweis. Sei zunächst p vollständig und $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau \cup B)$ beliebig. Ferner sei \mathfrak{C} ein Modell von $\{\psi(\bar{c}) \mid \psi(\bar{x}) \in p\} \cup \text{Th}(\mathfrak{A})$ für ein geeignetes Tupel $\bar{c} \subseteq C$. Dann gilt $\mathfrak{C} \models \varphi(\bar{c})$ oder $\mathfrak{C} \models \neg\varphi(\bar{c})$. Gilt nun $\mathfrak{C} \models \varphi(\bar{c})$, so folgt $\varphi(\bar{x}) \in p$. Denn sonst wäre $p \cup \{\varphi(\bar{x})\} \cup \text{Th}(\mathfrak{A})$ erfüllbar und damit wäre $q := p \cup \{\varphi(\bar{x})\}$ ein n -Typ von \mathfrak{A} über B mit $p \subsetneq q$, was nicht sein kann. Analog folgt aus $\mathfrak{C} \models \neg\varphi(\bar{c})$, dass $\neg\varphi(\bar{x}) \in p$ gilt.

Nun gelte $\varphi(\bar{x}) \in p$ oder $\neg\varphi(\bar{x}) \in p$ für alle $\varphi(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau \cup B)$ und sei q ein n -Typ von \mathfrak{A} über B mit $p \subseteq q$. Ferner sei $\varphi(\bar{x}) \in q$ beliebig. Dann gilt $\varphi(\bar{x}) \in p$ oder $\neg\varphi(\bar{x}) \in p$ und wegen $p \subseteq q$ folgt aus $\varphi(\bar{x}) \in q$ und der Erfüllbarkeit von q , dass $\varphi(\bar{x}) \in p$ gilt. Also ist $q \subseteq p$ und damit $p = q$. \square

Bemerkung 3.2. *Sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur, $B \subseteq A$, $\bar{a} = (a_0, \dots, a_{n-1}) \subseteq A$ und $p := \text{tp}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/B)$. Dann gibt es keine erfüllbare Formelmengengruppe $q \subseteq \text{FO}(\tau \cup B)$ mit $\text{Frei}(\varphi) \subseteq \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ für alle $\varphi \in q$, so dass $p \subsetneq q$ gilt. Insbesondere ist also p vollständig.*

Beweis. Sei $q \subseteq \text{FO}(\tau \cup B)$ mit $\text{Frei}(\varphi) \subseteq \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ für alle $\varphi \in q$ eine erfüllbare Formelmengengruppe, so dass $p \subseteq q$ ist und sei $\varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}, \bar{b}) \in \text{FO}(\tau \cup B)$ mit $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \notin p$, das heißt $\mathfrak{A} \not\models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$. Dann folgt $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\bar{a}, \bar{b})$, das heißt $\neg\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \in p$ und damit $\neg\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \in q$. Da q erfüllbar ist, folgt $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \notin q$ und wir haben $q \subseteq p$, also $p = q$. \square

Bemerkung 3.3. *Sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur und $B \subseteq A$. Dann ist $\{\text{tp}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/B) \mid \bar{a} \subseteq A\}$ genau die Menge der in \mathfrak{A} realisierten vollständigen Typen von \mathfrak{A} über B .*

Bemerkung 3.4. *Sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur und $B \subseteq A$. Ferner sei p ein n -Typ von \mathfrak{A} über B . Dann gibt es einen vollständigen n -Typ q von \mathfrak{A} über B mit $p \subseteq q$.*

Beispiel 3.1. *Es sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, S, 0)$ mit der Nachfolgerfunktion $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir nun $p_n := \text{tp}_{\mathfrak{A}}(n/\emptyset)$. Wie wir bereits gesehen haben, ist dann $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ genau die Menge der in \mathfrak{A} realisierten vollständigen 1-Typen von \mathfrak{A} über der leeren Menge. Ferner gilt $x = S^n(0) \in p_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt $p_n \neq p_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Man beachte, dass p_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ der einzige vollständige 1-Typ von \mathfrak{A} über der leeren Menge ist mit $x = S^n(0) \in p_n$. Außerdem gibt es einen vollständigen 1-Typen p_∞ von \mathfrak{A} über der leeren Menge mit $x \neq S^n(0) \in p_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn nach dem Kompaktheitssatz ist jede*

endliche Teilmenge von $\text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{x \neq S^n(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ erfüllbar, also ist $\text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{x \neq S^n(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ erfüllbar. Damit ist $\{x \neq S^n(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein 1-Typ von \mathfrak{A} über der leeren Menge, also gibt es einen vollständigen 1-Typ p_∞ von \mathfrak{A} über der leeren Menge mit $\{x \neq S^n(0) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq p_\infty$. Man beachte, dass p_∞ natürlich nicht in \mathfrak{A} realisiert ist. Ferner beachte man, dass wenn \mathfrak{B} eine Struktur ist, die p_∞ realisiert und $b \in B$ ein Element ist mit $p_\infty = \text{tp}_{\mathfrak{B}}(b/\emptyset)$, es Elemente $b', b'' \in B$ gibt mit $S(b') = b$ und $S(b) = b''$. Denn \mathfrak{B} ist ein Modell der Theorie von \mathfrak{A} und also gibt es in \mathfrak{B} genau ein Element ohne Vorgänger. Ferner gilt $b \neq S^n(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also haben wir $b', b'' \notin \mathbb{N} \cup \{b\}$ und $b' \neq b''$.

Satz 3.1. Sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur, $B \subseteq A$ und p ein n -Typ von \mathfrak{A} über B . Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{A}$ von \mathfrak{A} , so dass p in \mathfrak{C} realisiert ist.

Beweis. Sei \bar{b} eine Aufzählung von B und sei zunächst \mathfrak{C} ein Modell von $\text{Th}((\mathfrak{A}, \bar{b}))$, so dass ein Tupel $\bar{c} \subseteq C$ existiert mit $\mathfrak{C} \models \{\varphi(\bar{c}) \mid \varphi(\bar{x}) \in p\}$. Dann gilt $(\mathfrak{C}, \bar{b}^{\mathfrak{C}}) \equiv (\mathfrak{A}, \bar{b})$, also gibt es nach dem Satz über die elementare Amalgamation eine elementare Erweiterung $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{A}$ von \mathfrak{A} und eine elementare Einbettung $f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ mit $f(\bar{b}^{\mathfrak{C}}) = \bar{b}$. Damit gilt $(\mathfrak{D}, \bar{b}) \models \{\varphi(f(\bar{c})) \mid \varphi(\bar{x}) \in p\}$. \square

Es sei an dieser Stelle noch einmal explizit darauf hingewiesen, dass wir von einer Struktur \mathfrak{C} , die p realisiert, fordern, dass $B \subseteq C$ und $b^{\mathfrak{C}} = b$ gilt für $b \in B$. Wir können dies natürlich für alle $\mathfrak{C} \models \text{Th}(\mathfrak{A}_B)$ stets durch Umbenennung erzwingen, da insbesondere $b_1 \neq b_2 \in \text{Th}(\mathfrak{A}_B)$ gilt für $b_1, b_2 \in B$ mit $b_1 \neq b_2$. Wenn wir nun allerdings *gleichzeitig* fordern, dass \mathfrak{A} eine elementare Substruktur von \mathfrak{C} ist, so benötigen wir eine Methode beide Bedingungen simultan zu erzwingen. Dies läuft im Wesentlichen darauf hinaus zu zeigen, dass $p \cup \text{Th}(\mathfrak{A}_A)$ erfüllbar ist was gerade aus dem Satz über die elementare Amalgamation folgt.

Wir wollen nun dieses Ergebnis noch verallgemeinern, indem wir zeigen, dass es sogar eine elementare Erweiterung gibt, in der alle Typen realisiert sind. Wir iterieren dazu die Methode der elementaren Amalgamation.

Satz 3.2. Zu jeder Struktur \mathfrak{A} gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{A}$ in der alle Typen von \mathfrak{A} über A realisiert sind.

Beweis. Sei \mathfrak{A} eine beliebige τ -Struktur für eine Signatur τ und sei $t \subseteq \mathcal{P}(\text{FO}(\tau \cup A))$ die Menge aller Typen von \mathfrak{A} über A . Ferner sei $(p_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ für $\kappa = |t|$ eine Aufzählung von t . Wir konstruieren nun per Induktion über α eine elementare Kette $(\mathfrak{C}_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ von τ -Strukturen $\mathfrak{C}_\alpha \succeq \mathfrak{A}$, so dass p_β für alle $\beta < \alpha$ in \mathfrak{C}_α realisiert ist.

Zunächst setzen wir $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{A}$. Sei nun $\alpha < \kappa$ und sei \mathfrak{C}_β für $\beta < \alpha$ konstruiert. Per Induktion gilt $\mathfrak{C}_\alpha \succeq \mathfrak{A}$, also ist p_α als Typ von \mathfrak{A} über $A \subseteq C_\alpha$ auch ein Typ von \mathfrak{C}_α über A . Also gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{C}_{\alpha+1} \succeq \mathfrak{C}_\alpha$, so dass p_α in $\mathfrak{C}_{\alpha+1}$ realisiert ist. Da alle Typen p_β für $\beta < \alpha$ in \mathfrak{C}_α realisiert sind, sind alle diese Typen auch in $\mathfrak{C}_{\alpha+1}$ realisiert. Ist schließlich $\alpha < \kappa$ ein Limesordinal, so setzen wir $\mathfrak{C}_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{C}_\beta$. Da $(\mathfrak{C}_\beta)_{\beta < \alpha}$ eine elementare Kette ist, gilt dann $\mathfrak{C}_\alpha \succeq \mathfrak{C}_\beta$ für alle $\beta < \alpha$. Insbesondere sind alle Typen p_β für $\beta < \alpha$ in \mathfrak{C}_α realisiert.

Schließlich setzen wir $\mathfrak{C} := \bigcup_{\alpha < \kappa} \mathfrak{C}_\alpha$. Dann gilt $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{C}_\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$ und also sind alle Typen p_α für $\alpha < \kappa$ in \mathfrak{C} realisiert. Ferner haben wir insbesondere $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_0 \preceq \mathfrak{C}$ und sind fertig. \square

4 Saturatedheit

Definition 4.1. Sei $\kappa \in \text{Cn}^\infty$, τ eine Signatur und \mathfrak{B} eine τ -Struktur.

- (1) \mathfrak{B} heißt κ -saturiert, wenn jeder 1-Typ von \mathfrak{B} über einer Menge $A \subseteq B$ mit $|A| < \kappa$ in \mathfrak{B} realisiert ist. Ferner heißt \mathfrak{B} saturiert, wenn \mathfrak{B} $|B|$ -saturiert ist.
- (2) \mathfrak{B} heißt κ -universell, wenn für jede τ -Struktur \mathfrak{A} mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ und $|A| < \kappa$ eine elementare Einbettung $f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ existiert.
- (3) \mathfrak{B} heißt κ -homogen, wenn für alle Tupel $\bar{a}, \bar{b} \subseteq B$ mit $|\bar{a}| = |\bar{b}| < \kappa$ und $(\mathfrak{B}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b})$ und jedes Element $d \in B$ ein Element $c \in B$ existiert mit $(\mathfrak{B}, \bar{a}, c) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b}, d)$.

Satz 4.1. Sei \mathfrak{B} eine τ -Struktur und sei $\kappa \in \text{Cn}^\infty$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) \mathfrak{B} ist κ -saturiert.
- (2) Ist \mathfrak{A} eine τ -Struktur und sind $\bar{a} \in A^\alpha$ sowie $\bar{b} \in B^\alpha$ für ein $\alpha < \kappa$ mit $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b})$, so gibt es für alle $c \in A$ ein $d \in B$ mit $(\mathfrak{A}, \bar{a}, c) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b}, d)$.

Beweis. Gelte zunächst (2) und sei p ein beliebiger 1-Typ von \mathfrak{B} über einer Menge $C \subseteq B$ mit $|C| < \kappa$. Dann gibt es ein Modell \mathfrak{A} von $\text{Th}(\mathfrak{B}_C)$, so dass p in \mathfrak{A} realisiert ist, das heißt es gibt ein $c \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \{\varphi(c) \mid \varphi(x) \in p\}$. Wegen $\mathfrak{A} \models \text{Th}(\mathfrak{B}_A)$ gilt $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{a})$, wobei \bar{a} eine Aufzählung von A sei. Nun gibt es nach Voraussetzung ein $d \in B$ mit $(\mathfrak{A}, \bar{a}, c) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{a}, d)$ und es folgt $\mathfrak{B} \models \{\varphi(d) \mid \varphi(x) \in p\}$. Also ist p in \mathfrak{B} realisiert und also ist \mathfrak{B} κ -saturiert.

Gelte nun (1). Es sei $p := \text{tp}_{\mathfrak{A}}(c/\bar{a})$ der Typ von c in \mathfrak{A} über \bar{a} und es sei \tilde{p} die Formelmengende, die aus p entsteht, indem die Konstantensymbole aus \bar{a} durch die entsprechenden Konstantensymbole aus \bar{b} ersetzt werden. Dann gilt $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \models \{\varphi(c) \mid \varphi(c) \in \tilde{p}\}$. Da nach Voraussetzung außerdem $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b})$ gilt, ist (\mathfrak{A}, \bar{a}) ein Modell von $\text{Th}((\mathfrak{B}, \bar{b}))$ und also haben wir gezeigt, dass \tilde{p} ein Typ von \mathfrak{B} über \bar{b} ist. Da nun aber nach Voraussetzung $|\bar{b}| < \kappa$ gilt, ist \tilde{p} in \mathfrak{B} realisiert, das heißt es gibt ein $d \in B$ mit $\mathfrak{B} \models \{\varphi(d) \mid \varphi(x) \in \tilde{p}\}$. Da p nach Definition vollständig ist, ist auch \tilde{p} vollständig und also folgt daraus $(\mathfrak{A}, \bar{a}, c) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b}, d)$. \square

Was wir also lediglich tun müssen, um das gewünschte Element d in der Struktur \mathfrak{B} zu finden, ist, eine vollständige Beschreibung des Elements c in \mathfrak{A} über den Parametern \bar{a} herzunehmen und zu bemerken, dass diese Beschreibung bis auf Umbenennung von Parametern ein Typ von \mathfrak{B} über einer hinreichend kleinen Menge von Parametern ist. Dieser Typ ist dann in \mathfrak{B} realisiert, also gibt es ein Element d , auf welches diese vollständige Beschreibung zutrifft.

Korollar 4.1. Ist eine Struktur \mathfrak{B} κ -saturiert für ein $\kappa \in \text{Cn}^\infty$, so ist \mathfrak{B} κ -homogen.

Korollar 4.2. Sei \mathfrak{B} eine τ -Struktur und sei $\kappa \in \text{Cn}^\infty$, so dass \mathfrak{B} κ -saturiert ist. Ist dann \mathfrak{A} eine τ -Struktur und sind $\bar{a} \subseteq A$ sowie $\bar{b} \subseteq B$ mit $|\bar{a}| = |\bar{b}| < \kappa$ und $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b})$, so gibt es für alle $\bar{c} \subseteq A$ mit $|\bar{c}| < \kappa$ ein Tupel $\bar{d} \subseteq B$ mit $|\bar{d}| = |\bar{c}|$ und $(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{c}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{d})$.

Beweis. Sei $|\bar{c}| = \gamma$. Wir definieren die gewünschte Folge $(d_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ per Induktion über $\beta < \gamma$, so dass $(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{c}_{|\beta}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{d}_{|\beta})$ für alle $\beta \leq \gamma$. Für $\beta = 0$ ist nichts zu tun. Ist β eine Limeszahl, so ist $(d_\alpha)_{\alpha < \beta}$ bereits definiert und $(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{c}_{|\beta}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{d}_{|\beta})$ folgt unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung, da jede FO-Formel lediglich endlich viele Konstantensymbole enthält. Ist schließlich $\beta < \kappa$ beliebig und ist $\bar{d}_{|\beta}$ konstruiert, so erhalten wir $\bar{d}_{|(\beta+1)}$ unmittelbar aus Satz 4.1. Man beachte, dass $|\bar{b}| < \kappa$ und $\beta < \kappa$ und somit auch $|\bar{b}| + \beta + 1 < \kappa$ gilt. \square

Korollar 4.3. *Es sei \mathfrak{B} eine τ -Struktur, die κ -saturiert ist für ein $\kappa \in \text{Cn}^\infty$. Dann ist \mathfrak{B} κ^+ -universell.*

Satz 4.2. *Seien \mathfrak{A} und \mathfrak{B} saturierte τ -Strukturen mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ und $|A| = |B|$. Dann gilt $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Beweis. Es seien $\bar{a} = (a_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ und $\bar{b} = (b_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ Aufzählungen von A beziehungsweise B . Wir konstruieren nun Folgen $\bar{c} = (c_\alpha)_{\alpha < \kappa} \subseteq A$ und $\bar{d} = (d_\alpha)_{\alpha < \kappa} \subseteq B$ per Induktion über $\beta < \kappa$, so dass $(\mathfrak{A}, \bar{a}_{|\beta}, \bar{c}_{|\beta}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{d}_{|\beta}, \bar{b}_{|\beta})$ für alle $\beta \leq \kappa$ gilt.

Für $\beta = 0$ ist nichts zu tun und ist β ein Limesordinal, so sind $(c_\alpha)_{\alpha < \beta}$ sowie $(d_\alpha)_{\alpha < \beta}$ bereits definiert und die Behauptung folgt sofort aus der Induktionsvoraussetzung, da jede FO-Formel lediglich endlich viele Konstantensymbole enthält. Sei nun $\beta < \kappa$ beliebig und seien $\bar{c}_{|\beta}$ sowie $\bar{d}_{|\beta}$ konstruiert. Da \mathfrak{B} saturiert ist, gibt es ein $d_\beta \in B$ mit $(\mathfrak{A}, \bar{a}_{|\beta}, a_\beta, \bar{c}_{|\beta}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{d}_{|\beta}, d_\beta, \bar{b}_{|\beta})$. Da auch \mathfrak{A} saturiert ist, gibt es damit nun ein $c_\beta \in A$ mit $(\mathfrak{A}, \bar{a}_{|\beta}, a_\beta, \bar{c}_{|\beta}, c_\beta) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{d}_{|\beta}, d_\beta, \bar{b}_{|\beta}, b_\beta)$.

Damit sind die Folgen vollständig konstruiert und wir haben $(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{c}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{d}, \bar{b})$. Also ist $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ mit $f(a_\alpha) = d_\alpha$ und $f(c_\alpha) = b_\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$ eine Einbettung. (Man beachte, dass f insbesondere wohldefiniert ist.) Da nun aber \bar{b} bereits eine Aufzählung aller Elemente von B ist, ist f surjektiv und also ein Isomorphismus. \square

Man beachte, dass für endliche Strukturen bereits aus $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ folgt, dass \mathfrak{A} und \mathfrak{B} isomorph sind. Hingegen gilt die Aussage des Satzes im Allgemeinen nicht, wenn \mathfrak{A} und \mathfrak{B} unendlich sind und eine der Strukturen nicht saturiert ist. So ist beispielsweise $\mathfrak{B} = (\mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{Z} \times \{1\}, S, 0)$ mit $S(k, i) = (k + 1, i)$ und $0 = (0, 0)$ elementar äquivalent zu $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, S, 0)$, wie man mit Hilfe von Ehrenfeucht–Fraïssé-Spielen leicht zeigt. Außerdem kann man zeigen, dass \mathfrak{B} saturiert ist. Die Struktur \mathfrak{A} ist hingegen nicht saturiert und offensichtlich ist \mathfrak{A} nicht isomorph zu \mathfrak{B} .

Lemma 4.1. *Sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur und sei $\kappa \in \text{Cn}^\infty$ mit $\kappa \geq |\tau|$. Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{A}$ von \mathfrak{A} der Größe $|B| \leq |A|^\kappa$, so dass jeder Typ von \mathfrak{A} über einer Menge $C \subseteq A$ mit $|C| \leq \kappa$ in \mathfrak{B} realisiert ist.*

Beweis. Wir verfeinern den Beweis von Satz 3.2. Wir bemerken zunächst, dass es höchstens $|A|^\kappa$ Teilmengen der Größe höchstens κ von A gibt, da jede solche Menge das Bild einer Funktion $f : \kappa \rightarrow A$ ist. Nun gilt ferner für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $C \subseteq A$ mit $|C| \leq \kappa$, dass $|S_{\mathfrak{A}}^n(C)| \leq |\mathcal{P}(\text{FO}^n(\tau UC))| \leq 2^{|\tau| + |C| + n + \omega} \leq 2^\kappa$ ist. (Wobei ω im Exponenten den Fall endlicher Mengen τ und C abfängt.) Also müssen wir höchstens $\omega \times |A|^\kappa \times 2^\kappa = |A|^\kappa =: \lambda$ viele Typen realisieren. Sei $(p_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ eine Aufzählung dieser Typen.

Wir konstruieren nun per Induktion über α eine elementare Kette $(\mathfrak{B}_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ von τ -Strukturen $\mathfrak{B}_\alpha \succeq \mathfrak{A}$, so dass p_β für alle $\beta < \alpha$ in \mathfrak{B}_α realisiert ist und so, dass $|B_\alpha| \leq |A|^\kappa$ gilt. Zunächst setzen wir $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}$. Nun sei $\alpha < \lambda$ beliebig und sei \mathfrak{B}_α konstruiert. Per Induktion gilt $\mathfrak{B}_\alpha \succeq \mathfrak{A}$, also ist p_α als Typ von \mathfrak{A} über einer Menge $C \subseteq A \subseteq B_\alpha$ auch ein Typ von \mathfrak{B}_α über C . Also gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{B}_\alpha$, so dass p_α in \mathfrak{B} realisiert ist. Insbesondere ist also die Formelmengenge $p_\alpha \cup \text{Th}((\mathfrak{B}_\alpha)_{B_\alpha})$ erfüllbar. Nach den Löwenheim-Skolem Sätzen hat folglich die Menge $p_\alpha \cup \text{Th}((\mathfrak{B}_\alpha)_{B_\alpha})$ ein Modell $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ der Größe höchstens $|\tau| + |B_\alpha| \leq \kappa + |A|^\kappa = |A|^\kappa$. Damit ist nun aber $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ eine elementare Erweiterung von \mathfrak{B}_α , so dass p_α in $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ realisiert ist. Da alle p_β für $\beta < \alpha$ in \mathfrak{B}_α realisiert sind, sind folglich alle p_β für $\beta < \alpha + 1$ in $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ realisiert und es gilt $|B_{\alpha+1}| \leq |A|^\kappa$.

Ist nun schließlich α eine Limeszahl, so setzen wir $\mathfrak{B}_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{B}_\beta$. Dann gilt $\mathfrak{B}_\beta \preceq \mathfrak{B}_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$ und alle p_β für $\beta < \alpha$ sind in \mathfrak{B}_α realisiert. Ferner gilt $|B_\alpha| = |\bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta| \leq \alpha \times |A|^\kappa = |A|^\kappa$, da $\alpha \leq |A|^\kappa$ gilt. Schließlich setzen wir $\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathfrak{B}_\alpha$ und sind fertig. \square

Man beachte, dass wegen $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ ein Typ von \mathfrak{B} über einer Menge $C \subseteq A$ auch ein Typ von \mathfrak{A} über C und damit in \mathfrak{B} realisiert ist. Da wir aber lediglich Parameter Mengen betrachten, welche Teilmengen des Universums von \mathfrak{A} sind, ist \mathfrak{B} noch nicht notwendigerweise κ -saturiert. Wir verwenden dieses Resultat nun, um die Existenz einer κ -saturierten (sogar κ^+ -saturierten) Erweiterung zu zeigen. Zuvor benötigen wir noch eine Definition.

Definition 4.2. Sei α eine Ordinalzahl. Die *Kofinalität* $\text{cf}(\alpha)$ von α ist die kleinste Ordinalzahl, so dass eine Abbildung $f : \text{cf}(\alpha) \rightarrow \alpha$ existiert, deren Bild in α nicht beschränkt ist. (Das heißt für alle $\gamma \in \alpha$ gibt es ein $\delta \in \text{cf}(\alpha)$, so dass $f(\delta) \geq \gamma$ ist.) Eine Ordinalzahl α heißt *regulär*, falls α Limesordinalzahl ist und $\text{cf}(\alpha) = \alpha$ gilt.

Satz 4.3. *Nachfolgerkardinalzahlen sind regulär.*

Beweis. Übung. \square

Satz 4.4. *Sei $\kappa \in \text{Cn}^\infty$ und sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur. Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{A}$ von \mathfrak{A} der Größe $|B| \leq |A|^\kappa$, so dass jeder Typ von \mathfrak{B} über einer Menge $C \subseteq B$ mit $|C| \leq \kappa$ in \mathfrak{B} realisiert sind.*

Beweis. Mit Hilfe von Lemma 4.1 lässt sich per Induktion über α eine elementare Kette $(\mathfrak{B}_\alpha)_{\alpha < \kappa^+}$ von τ -Strukturen $\mathfrak{B}_\alpha \succeq \mathfrak{A}$ mit $|B_\alpha| \leq |A|^\kappa$ konstruieren, so dass alle Typen von \mathfrak{B}_α über einer Menge $C \subseteq B_\alpha$ mit $|C| \leq \kappa$ in $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ realisiert sind. Dazu wähle man $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}$ und für Limesordinals α setze man $\mathfrak{B}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{B}_\beta$. Man hat dann $|B_\alpha| \leq \kappa^+ \cdot |A|^\kappa \leq 2^\kappa \cdot |A|^\kappa = |A|^\kappa$. Für ein beliebiges $\alpha < \kappa^+$ und konstruiertes \mathfrak{B}_α wähle man schließlich $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ gemäß Lemma 4.1. Man hat dann $|B_{\alpha+1}| \leq |B_\alpha|^\kappa \leq (|A|^\kappa)^\kappa = |A|^{\kappa \cdot \kappa} = |A|^\kappa$.

Haben wir diese Kette konstruiert, so setzen wir $\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} \mathfrak{B}_\alpha$. Dann ist $|B| \leq \kappa^+ \cdot |A|^\kappa \leq 2^\kappa \cdot |A|^\kappa = |A|^\kappa$ und wir wollen nun zeigen, dass \mathfrak{B} gerade κ^+ -saturiert ist. Sei also $C \subseteq B$ mit $|C| \leq \kappa$ und sei $p \in S_{\mathfrak{B}}^n(C)$ ein vollständiger n -Typ von \mathfrak{B} über C . Es genügt nun zu zeigen, dass es ein $\alpha < \kappa^+$ gibt mit $C \subseteq B_\alpha$. (Dann ist nämlich p nach Konstruktion in $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ und wegen $\mathfrak{B}_{\alpha+1} \preceq \mathfrak{B}$ ist p dann auch

realisiert in \mathfrak{B} .) Sei dazu $f : |C| \rightarrow C$ eine Bijektion und sei $g : C \rightarrow \kappa^+$ definiert durch $g(c) := \min\{\alpha < \kappa^+ \mid c \in B_\alpha\}$. Nun ist κ^+ eine Nachfolgerkardinalzahl, also ist κ^+ regulär, das heißt $\text{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$. Somit ist κ^+ die kleinste Ordinalzahl λ , so dass es eine Abbildung von λ nach κ^+ gibt, deren Bild in κ^+ unbeschränkt ist. Nun ist $g \circ f : |C| \rightarrow \kappa^+$ eine Abbildung von einer Ordinalzahl nach κ^+ und es gilt $|C| \leq \kappa < \kappa^+$. Folglich ist das Bild von $g \circ f$ in κ^+ beschränkt, das heißt es gibt ein $\alpha < \kappa^+$ mit $g \circ f(\beta) \leq \alpha$ für alle $\beta < |C|$. Da f eine Bijektion ist gilt damit $g(c) \leq \alpha$ für alle $c \in C$, also ist $C \subseteq B_\alpha$. \square

Korollar 4.4. *Sei $\kappa \in \text{Cn}^\infty$ und sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur. Dann gibt es eine κ^+ -saturierte elementare Erweiterung $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{A}$ der Größe $|B| \leq |A|^\kappa$ von \mathfrak{A} .*

Wir wollen nun die Resultate über Saturiertheit, die wir in diesem Abschnitt bewiesen haben, verwenden, um den Satz von van Benthem zu beweisen. Dieser besagt, dass das modale Fragment MF von FO genau das bisimulationsinvariante Fragment von FO ist. Das modale Fragment MF von FO ist dabei die Menge der prädikatenlogischen Formeln $\varphi^*(x) \in \text{FO}$ mit einer freien Variablen, welche durch die übliche Übersetzung $\varphi \mapsto \varphi^*(x)$ modallogischer Formeln $\varphi \in \text{ML}$ nach FO entstehen.

Wir beschränken uns im Folgenden auf Signaturen τ , die ausschließlich einstellige und zweistellige Relationssymbole enthalten. Das heißt wenn wir $\psi(x) \in \text{FO}$ schreiben, so meinen wir stets $\psi(x) \in \text{FO}(\tau)$ für eine Signatur τ der Form $\tau = \{E_a \mid a \in A\} \cup \{P_i \mid i \in I\}$ für gewisse Mengen A und I , wobei E_a für $a \in A$ ein zweistelliges Relationssymbol ist und P_i für $i \in I$ ein einstelliges Relationssymbol ist. Mit $\text{MF}(\tau)$ bezeichnen wir entsprechend die Formeln aus dem modalen Fragment MF über der Signatur τ . Wir schreiben $\mathcal{K} = (V, \tau^\mathcal{K})$ für Strukturen über solchen Signaturen τ , welche wir Transitionssysteme oder auch Kripke-Strukturen nennen.

Für ein Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, \tau^\mathcal{K})$ und einen Knoten $v \in V$ schreiben wir nun $\text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}, v) = \{\psi(x) \in \text{MF}(\tau) \mid \mathcal{K} \models \psi(v)\}$. Für Transitionssysteme $\mathcal{K} = (V, \tau^\mathcal{K})$ und $\mathcal{K}' = (V', \tau^{\mathcal{K}'})$ sowie Knoten $v \in V$ und $v' \in V'$ schreiben wir wie üblich $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$, wenn es eine Bisimulation $Z \subseteq V \times V'$ zwischen \mathcal{K} und \mathcal{K}' gibt, so dass $(v, v') \in Z$ gilt. Ferner schreiben wir $\mathcal{K}, v \sim_\omega \mathcal{K}', v'$, wenn $\text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}, v) = \text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}', v')$ ist, das heißt, wenn $\mathcal{K}, v \equiv_{\text{ML}} \mathcal{K}', v'$ gilt.

Wir nennen eine Formel $\psi(x) \in \text{FO}(\tau)$ wie üblich *bisimulationsinvariant*, wenn für alle Transitionssysteme $\mathcal{K} = (V, \tau^\mathcal{K})$ sowie $\mathcal{K}' = (V', \tau^{\mathcal{K}'})$ und alle Knoten $v \in V$ sowie $v' \in V'$ aus $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$ folgt, dass $\mathcal{K} \models \psi(v)$ genau dann gilt, wenn auch $\mathcal{K}' \models \psi(v')$ gilt. Wir wissen, dass jede Formel $\psi(x) \in \text{MF}$ bisimulationsinvariant ist, das heißt, sind \mathcal{K} sowie \mathcal{K}' Transitionssysteme und $v \in V$ sowie $v' \in V'$ Knoten, so dass $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$ gilt, so gilt $\mathcal{K}, v \sim_\omega \mathcal{K}', v'$. Die Umkehrung gilt hingegen im Allgemeinen nicht. Für die Umkehrung ist es beispielsweise hinreichend von den Transitionssystemen zu fordern, dass sie endlich verzweigt sind.

Wir wollen nun zeigen, dass die Umkehrung auch gilt, wenn die Transitionssysteme beliebig verzweigt sind, solange sie ω -saturiert sind. Dies ist ein wesentliches Hilfsmittel für den Beweis des Satzes von van Benthem, wo wir dann die Existenz von ω -saturierten Erweiterungen beliebiger Transitionssysteme ausnutzen werden.

Satz 4.5. *Seien $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}})$ sowie $\mathcal{K}' = (V', \tau^{\mathcal{K}'})$ zwei ω -saturierte Transitionssysteme und seien $v \in V$ sowie $v' \in V'$ Knoten mit $\mathcal{K}, v \sim_{\omega} \mathcal{K}', v'$. Dann gilt $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$.*

Beweis. Sei $Z = \{(u, u') \mid \mathcal{K}, u \sim_{\omega} \mathcal{K}', u'\}$. Nach Voraussetzung gilt $(v, v') \in Z$ und wir zeigen nun, dass Z eine Bisimulation ist. Sei also $(u, u') \in Z$ beliebig. Nach Definition von Z gilt offenbar für jede unäre Relation $P \in \tau$ genau dann $\mathcal{K} \models Pu$, wenn auch $\mathcal{K}' \models Pu'$ gilt. Wir zeigen, dass die Hin-Eigenschaft für Bisimulationen erfüllt ist, die Her-Eigenschaft zeigt man analog.

Sei also $w \in V$ und $a \in A$ mit $(u, w) \in E_a$. Wir definieren $p := \{E_a u' x\} \cup \text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}, w)$ und wir wollen zeigen, dass p ein Typ von \mathcal{K}' ist. (Genauer, ein 1-Typ von \mathcal{K}' über $\{u'\}$.) Dazu genügt es zu zeigen, dass für jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}, w)$ ein $w' \in V'$ existiert mit $\mathcal{K}' \models E_a u' w' \wedge \bigwedge \Phi_0(w')$. Nehmen wir an, dies gilt nicht. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}, w)$ mit $\mathcal{K}' \models \varphi(u')$ mit $\varphi(x) := \forall y (E_a x y \rightarrow \neg \bigwedge \Phi_0(y))$. Nun ist $\Phi_0 \subseteq \text{MF}$, also $\bigwedge \Phi_0(y) \in \text{MF}$ und folglich haben wir $\varphi(y) \in \text{MF}$. Wegen $\mathcal{K}, u \sim_{\omega} \mathcal{K}', u'$ gilt damit aber $\mathcal{K} \models \varphi(u)$ und somit insbesondere $\mathcal{K} \models \neg \bigwedge \Phi_0(w)$, im Widerspruch zu $\Phi_0 \subseteq \text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}, w)$.

Also ist p ein 1-Typ von \mathcal{K} über $\{u'\}$ und da \mathcal{K}' nach Voraussetzung ω -saturiert ist, gibt es folglich ein $w' \in V'$ mit $\mathcal{K}' \models p(w')$. Wegen $E_a u' x \in p$ gilt also $(u', w') \in E'_a$ und wegen $\text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}, w) \subseteq p$ gilt $\mathcal{K}, w \sim_{\omega} \mathcal{K}', w'$, das heißt $(w, w') \in Z$. \square

Man beachte, dass wir die ω -Saturiertheit von \mathcal{K} und \mathcal{K}' nur teilweise ausgenutzt haben, da wir lediglich Typen über einelementigen Mengen betrachtet haben.

Man beachte außerdem die Ähnlichkeit der Argumentation zum Beweis der entsprechenden Aussage für endlich verzweigte Transitionssysteme. Die Bisimulation, die dort konstruiert wird, ist die gleiche wie im vorigen Beweis. Um dann die Hin-Eigenschaft (und analog die Her-Eigenschaft) zu beweisen, nimmt man an, dass zu einem Paar $(u, u') \in Z$ und einem entsprechenden a -Nachfolger w von u (das heißt $(u, w) \in E_a$) kein w' existiert mit $(u', w') \in Z$. Ist dann w' ein beliebiger Nachfolger von u' , so gibt es nach Definition von Z eine modallogische Formel $\varphi_{w'}$, so dass $\mathcal{K}', w' \models \varphi_{w'}$ und $\mathcal{K}, w \models \neg \varphi_{w'}$. Ist dann φ die Disjunktion dieser endlich vielen Formeln $\varphi_{w'}$, so gilt $\mathcal{K}', u' \models [a]\varphi$ und $\mathcal{K}, u \models \neg [a]\varphi$, im Widerspruch zu $(u, u') \in Z$.

Satz 4.6. *(van Benthem) Eine Formel $\psi(x) \in \text{FO}$ ist genau dann bisimulationsinvariant, wenn eine Formel $\varphi(x) \in \text{MF}$ existiert mit $\psi(x) \equiv \varphi(x)$.*

Beweis. Dass jede Formel $\varphi(x) \in \text{MF}$ bisimulationsinvariant ist, wissen wir bereits. Nehmen wir also an, dass $\psi(x) \in \text{FO}(\tau)$ für eine Signatur τ von Transitionssystemen bisimulationsinvariant ist. Wir definieren $\Phi := \{\varphi(x) \in \text{MF}(\tau) \mid \psi(x) \models \varphi(x)\}$, das heißt Φ ist die Menge der modalen Folgerungen aus ψ . Es genügt nun zu zeigen, dass $\Phi \models \psi(x)$ gilt. (Nach dem Kompaktheitssatz gibt es dann eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \psi(x)$ und wir haben $\psi(x) \equiv \bigwedge \Phi_0$.)

Sei also $\mathcal{K}_0 = (V_0, \tau^{\mathcal{K}_0})$ ein Transitionssystem und $v_0 \in V_0$ ein Knoten, so dass $\mathcal{K}_0 \models \Phi(v_0)$ gilt. Wir müssen nun zeigen, dass auch $\mathcal{K}_0 \models \psi(v_0)$ gilt. Dazu zeigen wir zunächst, dass die Menge $\Theta := \{\psi(x)\} \cup \text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}_0, v_0)$ erfüllbar ist. Wäre Θ unerfüllbar, so gäbe es endlich viele Formeln $\vartheta_0(x), \dots, \vartheta_{n-1}(x) \in \text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}_0, v_0)$

mit $\psi(x) \models \neg(\vartheta_0(x) \wedge \dots \wedge \vartheta_{n-1}(x))$. Also wäre nach Definition von Φ gerade $\neg(\vartheta_0(x) \wedge \dots \wedge \vartheta_{n-1}(x)) \in \Phi$. Damit hätten wir $\mathcal{K}_0 \models \neg(\vartheta_0(v_0) \wedge \dots \wedge \vartheta_{n-1}(v_0))$ nach Wahl von \mathcal{K}_0 , im Widerspruch zu $\vartheta_0(x), \dots, \vartheta_{n-1}(x) \in \text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}_0, v_0)$. Folglich gibt es ein Transitionssystem $\mathcal{K}_1 = (V_1, \tau^{\mathcal{K}_1})$ und einen Knoten $v_1 \in V_1$ mit $\mathcal{K}_1 \models \Theta(v_1)$.

Seien nun $\mathcal{K}_0^+ \succeq \mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_1^+ \succeq \mathcal{K}_1$ zwei ω -saturierte Erweiterungen von \mathcal{K}_0 beziehungsweise \mathcal{K}_1 . Dann gilt $\text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}_0^+, v_0) = \text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}_0, v_0) = \text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}_1, v_1) = \text{Th}_{\text{MF}}(\mathcal{K}_1^+, v_1)$, also folgt nach Satz 4.5 $\mathcal{K}_1^+, v_1 \sim \mathcal{K}_0^+, v_0$. Da $\mathcal{K}_1 \preceq \mathcal{K}_1^+$ und $\mathcal{K}_1 \models \psi(v_1)$ gilt, folgt weiter $\mathcal{K}_1^+ \models \psi(v_1)$. Nun ist $\psi(x)$ nach Voraussetzung bisimulationsinvariant und also haben wir $\mathcal{K}_0^+ \models \psi(v_0)$. Wegen $\mathcal{K}_0 \preceq \mathcal{K}_0^+$ folgt damit schließlich $\mathcal{K}_0 \models \psi(v_0)$. \square

Der Satz von van Benthem besagt, dass MF gerade das bisimulationsinvariante Fragment von FO ist. Der Satz von Rosen, den wir hier nicht beweisen, besagt ferner, dass dies auch auf endlichen Strukturen gilt. Das heißt, die Aussage des Satzes gilt weiterhin, wenn man alle betrachteten Strukturklassen auf endliche Strukturen eingeschränkt. Eine Formel $\psi(x)$ ist in diesem Kontext somit bisimulationsinvariant, wenn für alle *endlichen* Transitionssysteme \mathcal{K} sowie \mathcal{K}' und alle $v \in V$ sowie $v' \in V'$ aus $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$ folgt, dass $\mathcal{K} \models \varphi(v)$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{K}' \models \psi(v')$ gilt. Eine Formel $\psi(x) \in \text{FO}$ ist logisch äquivalent zu einer Formel $\varphi(x) \in \text{FO}$, wenn für alle *endlichen* Strukturen \mathfrak{A} und alle $a \in A$ genau dann $\mathfrak{A} \models \psi(a)$ gilt, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ gilt. Solche Aussagen sind Gegenstand der endlichen Modelltheorie.

Nun kann man natürlich auch für andere Logiken fragen, ob es eine natürliche Charakterisierung des bisimulationsinvarianten Fragments dieser Logik gibt. So hat sich herausgestellt, dass das bisimulationsinvariante Fragment der monadischen Logik zweiter Stufe MSO gerade der μ -Kalkül L_μ ist, den wir später behandeln werden. Ferner gibt es eine solche Charakterisierung für die monadische Pfadlogik zweiter Stufe MPL, das heißt diejenige Einschränkung von MSO, bei welcher die Quantoren zweiter Stufe $\exists X\varphi$ beziehungsweise $\forall X\varphi$ nur über solche Mengen X quantifizieren, die Pfade im Graphen sind. Man kann zeigen, dass die Logik CTL* gerade das bisimulationsinvariante Fragment von MPL ist.

5 Infinitäre Logik und Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Wir kennen einige fundamentale Schwächen in der Ausdrucksstärke der Prädikatenlogik erster Stufe, insbesondere das Fehlen eines Rekursionsmechanismus. Dies führt zum Beispiel dazu, dass Erreichbarkeit in Graphen nicht ausdrückbar ist. Auch ist Endlichkeit in der Prädikatenlogik erster Stufe nicht ausdrückbar, Unendlichkeit ist nur durch unendliche Formelmengen ausdrückbar. Daher sucht man nach Erweiterungen der Logik erster Stufe, welche ausdrucksstärker sind. Die natürlichste Erweiterung ist die Logik zweiter Stufe, in der man nicht nur über Elemente des Universums, sondern über beliebige Relationen quantifizieren kann. Allerdings ist diese Erweiterung modelltheoretisch nicht mehr handhabbar, das heißt es gelten kaum noch starke Resultate in der Art des Kompaktheitssatzes oder des Satzes von Löwenheim-Skolem.

Auch sind Erweiterungen der Logik erster Stufe in algorithmischer Hinsicht bedenklich, da das Erfüllbarkeitsproblem bereits für die volle Logik erster Stufe unentscheidbar ist. Daher betrachtet man oft auch Erweiterungen von Einschränkungen der Logik erster Stufe, wie etwa den modalen μ -Kalkül. Fixpunktlogiken ganz allgemein sind eine fundamentale und elegante Methode, um einen Rekursionsmechanismus zu einer Logik hinzuzufügen.

Auch kann man statt zur vollen Logik zweiter Stufe zur monadischen Logik zweiter Stufe übergehen. Wir wollen uns hier eine andere, ebenfalls sehr natürliche Erweiterung der Logik erster Stufe ansehen, nämlich die infinitäre Logik. Man kann hierbei Konjunktionen und Disjunktionen auch über unendliche Formelmengen bilden. Diese Logik ist in zweierlei Hinsicht interessant. Zum einen gilt der absteigende Satz von Löwenheim-Skolem auch für diese Logik, das heißt es stehen gewisse modelltheoretische Werkzeuge zur Verfügung. (Wie wir sehen werden, trifft dies auf den Kompaktheitssatz und den aufsteigenden Satz von Löwenheim-Skolem allerdings nicht zu.) Und zweitens, und dies wird der wesentliche Aspekt in diesem Abschnitt sein, lässt sich elementare Äquivalenz von Strukturen bezüglich Formeln der infinitären Logik auf natürliche Art und Weise durch eine infinitäre Variante der Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele charakterisieren. Wir werden diese Methode verwenden um zu zeigen, dass die Klasse WO aller $\{<\}$ -Strukturen mit binärem Relationsymbol $<$, so dass die entsprechende Relation eine Wohlordnung ist, *nicht* in der infinitären Logik axiomatisierbar ist.

Definition 5.1. Sei $\kappa \in \text{Cn}^\infty$ eine unendliche Kardinalzahl und sei τ eine Signatur. Die *infinitäre Logik* $L_{\kappa\omega}(\tau)$ ist induktiv wie folgt definiert.

- Jede atomare Formel in $\text{FO}(\tau)$ ist in $L_{\kappa\omega}(\tau)$.
- Ist $\varphi \in L_{\kappa\omega}(\tau)$, so sind $\neg\varphi, \exists x\varphi, \forall x\varphi \in L_{\kappa\omega}(\tau)$.
- Ist $\Phi \subseteq L_{\kappa\omega}(\tau)$ eine Formelmenge mit $|\Phi| < \kappa$, so sind $\bigvee \Phi, \bigwedge \Phi \in L_{\kappa\omega}(\tau)$.

Wir schreiben außerdem $L_{\infty\omega}(\tau) = \bigcup_{\kappa \in \text{Cn}^\infty} L_{\kappa\omega}(\tau)$.

Man beachte, dass der zweite Parameter ω als Index unserer Logiken stets fixiert ist. Dies zeigt an, dass wir lediglich endliche Folgen von Quantoren zulassen. Im Allgemeinen kann man natürlich auch diesen zweiten Parameter variieren, das heißt, beliebig lange Folgen von Quantoren erlauben. (Das heißt die Logik $L_{\kappa\lambda}$ erlaubt

auch die Bildungsgesetze $\exists \bar{x}\varphi$ und $\forall \bar{x}\varphi$ für eine Formel φ , wenn \bar{x} ein Tupel von Variablen der Länge höchstens λ ist.) Diese Variante der infinitären Logiken werden wir hier zwar nicht betrachten, wir behalten aber die übliche Bezeichnung $L_{\kappa\omega}$ bei.

Die Logik $L_{\omega\omega}(\tau)$ ist nun gerade die Logik $\text{FO}(\tau)$ erster Stufe. Die Logik $L_{\aleph_1\omega}(\tau)$ in der Disjunktionen und Konjunktionen über abzählbare Formelmengen gebildet werden können bezeichnen wir mit $L_{\omega_1\omega}$.¹

Die Semantik der infinitären Logik ist auf die offensichtliche Art und Weise definiert: Es seien $\kappa \in \text{Cn}^\infty$ eine unendliche Kardinalzahl, τ eine Signatur, \mathfrak{A} eine τ -Struktur, $\Phi \subseteq L_{\kappa\omega}(\tau)$ eine Formelmenge der Mächtigkeit $|\Phi| < \kappa$ und $\bar{a} \subseteq A$ eine Belegung für die höchstens κ vielen freien Variablen die in Φ vorkommen. Dann ist die Semantik von $\bigwedge \Phi$ und $\bigvee \Phi$ wie folgt festgelegt.

- $\mathfrak{A}, \bar{a} \models \bigwedge \Phi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A}, \bar{a} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.
- $\mathfrak{A}, \bar{a} \models \bigvee \Phi$ genau dann, wenn es ein $\varphi \in \Phi$ gibt mit $\mathfrak{A}, \bar{a} \models \varphi$.

In allen anderen Fällen stimmt die Semantik der infinitären Logik mit der Semantik der Logik erster Stufe überein.

Wir wollen uns nun zunächst zwei Beispiele für die Ausdrucksstärke der infinitären Logik ansehen. Anschließend beweisen wir, dass der Kompaktheitssatz und der aufsteigende Satz von Löwenheim-Skolem für die infinitäre Logik nicht gelten, wohingegen der absteigende Satz von Löwenheim-Skolem weiter gilt.

Zunächst können wir Endlichkeit ausdrücken. Wir definieren dazu für $n < \omega$ wie üblich den Satz $\varphi_{\geq n} := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \neq x_j)$ und wir setzen $\varphi_{\text{fin}} := \bigvee \{\neg \varphi_{\geq n} \mid n < \omega\} \in L_{\omega_1\omega}$. Dann gilt für jede Struktur \mathfrak{A} genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{fin}}$, wenn \mathfrak{A} endlich ist.

Betrachten wir nun eine τ -Struktur \mathfrak{A} sowie eine Teilmenge $B \subseteq A$ mit $|B| < \kappa$ für ein $\kappa \in \text{Cn}^\infty$. Ist dann $p(\bar{x}) \in S_{\mathfrak{A}}^n(B)$ mit $|\bar{x}| = n$ ein vollständiger n -Typ von \mathfrak{A} über B für ein $n < \omega$, so ist $\varphi(\bar{x}) := \bigwedge p \in L_{\kappa\omega}$ und für alle $\bar{a} \in A^n$ gilt genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, wenn $\text{tp}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/B) = p$ ist. Das heißt wir können alle Tupel von Elementen, die wir durch einen Typ beschreiben können, durch eine Formel in der infinitären Logik definieren.

Bemerkung 5.1. *Es gibt eine unendliche unerfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq L_{\omega_1\omega}(\emptyset)$, so dass jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.*

Beweis. Setze $\Phi := \{\varphi_{\text{fin}}\} \cup \{\varphi_{\geq n} \mid n < \omega\}$. □

Damit haben wir gezeigt, dass der Kompaktheitssatz für $L_{\omega_1\omega}$ nicht gilt. Wir wollen nun zeigen, dass auch der aufsteigende Satz von Löwenheim-Skolem für $L_{\omega_1\omega}$ nicht gilt. Wir betrachten dazu die beiden ersten Peano-Axiome $p_1 := \forall x(Sx \neq 0)$ und $p_2 := \forall x \forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$ sowie die Formelmenge $\Phi = \{\varphi_n(x) \mid n < \omega\}$ mit $\varphi_n(x) = (S^n(0) = x)$ für $n < \omega$. Da Φ abzählbar ist, ist $\varphi := \forall x \bigvee \Phi$ eine Formel der Logik $L_{\omega_1\omega}(0, S)$ und also ist $p_1 \wedge p_2 \wedge \varphi$ ebenfalls eine Formel der Logik $L_{\omega_1\omega}(0, S)$. Man kann sich nun leicht überlegen, dass für eine $\{0, S\}$ -Struktur $\mathfrak{A} = (A, 0^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}})$ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt, wenn $\mathfrak{A} \cong (\mathbb{N}, 0, S)$ ist. (Der gesuchte Isomorphismus bildet

¹Allgemein schreibt man gelegentlich ω_α anstelle von \aleph_α , wir verwenden dies aber nur in diesem Kontext.

0 auf $0^{\mathfrak{A}}$ und n auf $(S^{\mathfrak{A}})^n(0^{\mathfrak{A}})$ ab. Diese Funktion erfüllt per Definition die (starke) Homomorphie-Eigenschaft, ist wegen $\mathfrak{A} \models p_1 \wedge p_2$ injektiv und wegen $\mathfrak{A} \models \varphi$ auch surjektiv.) Wir können also die Struktur $(\mathbb{N}, 0, S)$ in der infinitären Logik bis auf Isomorphie charakterisieren.

Bemerkung 5.2. *Es gibt einen Satz $\varphi \in L_{\omega_1\omega}(0, S)$, der ein unendliches Modell besitzt, so dass jedes Modell von φ abzählbar ist.*

Wir kommen nun zu der Feststellung, dass der absteigende Satz von Löwenheim-Skolem nichtsdestoweniger auch für die infinitäre Logik $L_{\kappa\omega}$ für jedes $\kappa \in \text{Cn}^\infty$ Gültigkeit besitzt. Dabei müssen wir natürlich die Kardinalität, welche durch κ bereits vorgegeben ist berücksichtigen. Für den Beweis des Satzes benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

Definition 5.2. Die Menge der Teilformeln $\text{Sub}(\varphi)$ einer Formel $\varphi \in L_{\infty\omega}$ ist induktiv wie folgt definiert.

- $\text{Sub}(\varphi) = \{\varphi\}$, wenn φ atomar ist.
- $\text{Sub}(\varphi) = \{\varphi\} \cup \text{Sub}(\psi)$, falls $\varphi \in \{\neg\psi, \exists x\psi, \forall x\psi\}$.
- $\text{Sub}(\varphi) = \{\varphi\} \cup \bigcup \{\text{Sub}(\psi) \mid \psi \in \Phi\}$, falls $\varphi \in \{\bigwedge \Phi, \bigvee \Phi\}$.

Die Menge $\text{Frei}(\varphi)$ der freien Variablen einer Formel $\varphi \in L_{\infty\omega}$ ist vollkommen analog induktiv über den Aufbau von φ definiert.

Bemerkung 5.3. *Für alle $\varphi \in L_{\kappa\omega}$ gelten folgende Aussagen.*

- (1) $|\text{Sub}(\varphi)| \leq \kappa$.
- (2) Ist $|\text{Frei}(\varphi)| < \omega$, so ist $|\text{Frei}(\psi)| < \omega$ für alle $\psi \in \text{Sub}(\varphi)$.

Beweis. Induktion über den Formelaufbau. □

Satz 5.1. (Löwenheim-Skolem) *Es sei τ eine Signatur, $\kappa \in \text{Cn}^\infty$ mit $\kappa \geq |\tau|$ und $\varphi \in L_{\kappa+\omega}(\tau)$ ein Satz. Dann gibt es zu jedem Modell $\mathfrak{B} \models \varphi$ von φ eine Substruktur $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ mit $|A| \leq \kappa$ und $\mathfrak{A} \models \varphi$.*

Beweis. Nach Bemerkung 5.3 gilt zunächst $|\text{Sub}(\varphi)| \leq \kappa$ sowie $|\text{Frei}(\psi)| < \omega$ für alle $\psi \in \text{Sub}(\varphi)$. Wir definieren nun induktiv eine Folge $(A_n)_{n < \omega}$ von Mengen $A_n \subseteq B$ mit $|A_n| \leq \kappa$ wie folgt. Zunächst sei $A_0 := \langle \emptyset \rangle_{\mathfrak{B}}$. Da $|\tau| \leq \kappa$ ist, gilt $|A_0| \leq \kappa$. Sei nun $n < \omega$ und sei A_n konstruiert. Wir wählen für jede Teilformel $\psi(x_1, \dots, x_k, x) \in \text{Sub}(\varphi)$ von φ und jedes Tupel $\bar{a} \in A^k$, so dass $\mathfrak{B} \models \exists x\psi(\bar{a}, x)$ gilt, ein Element $b \in B$ mit $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{a}, b)$. Es sei nun X die Menge aller dieser gewählten Elemente b und es sei $A_{n+1} := \langle A_n \cup X \rangle_{\mathfrak{B}}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $|A_n| \leq \kappa$ und ferner gilt $|\text{Sub}(\varphi)| \leq \kappa$, also ist $|X| \leq \kappa$ und folglich $|A_n \cup X| \leq \kappa$. Ferner gilt $|\tau| \leq \kappa$, also ist auch $|A_{n+1}| \leq \kappa$. Schließlich setzen wir $A := \bigcup \{A_n \mid n < \omega\}$.

Da $|A_n| \leq \kappa$ gilt für alle $n < \omega$, ist auch $|A| \leq \kappa$. Ferner ist jedes A_n Universum einer Substruktur von \mathfrak{B} , also ist auch A Universum einer Substruktur \mathfrak{A} von \mathfrak{B} . Es bleibt nun zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt. Dazu zeigen wir per Induktion über den Aufbau von ψ , dass für alle $\psi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Sub}(\varphi)$ und alle $\bar{a} \in A^n$ genau dann $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ gilt, wenn auch $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{a})$ gilt. Ist ψ atomar, so folgt die Behauptung unmittelbar aus $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Ist $\psi = \neg\psi'$ für ein $\psi' \in \text{Sub}(\varphi)$ oder $\psi \in \{\bigvee \Phi, \bigwedge \Phi\}$

für eine Menge $\Phi \subseteq \text{Sub}(\varphi)$, so folgt die Behauptung unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung. Es bleibt also der Fall, dass $\psi = \exists x\psi'(x_1, \dots, x_n, x)$ ist für ein $\psi' \in \text{Sub}(\varphi)$. Sei nun $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ und gelte zunächst $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi'(\bar{a}, a)$ und nach Induktionsvoraussetzung folgt $\mathfrak{B} \models \psi'(\bar{a}, a)$ also insbesondere $\mathfrak{B} \models \exists x\psi'(\bar{a}, x) = \psi(\bar{a})$. Gelte nun umgekehrt $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{a})$, das heißt $\mathfrak{B} \models \exists x\psi'(\bar{a}, x)$. Ist dann $m < \omega$ mit $\bar{a} \subseteq A_m$, so gibt es nach Definition von A_{m+1} ein $b \in A_{m+1} \subseteq A$ mit $\mathfrak{B} \models \psi'(\bar{a}, b)$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt hieraus $\mathfrak{A} \models \psi'(\bar{a}, b)$ und damit insbesondere $\mathfrak{A} \models \exists x\psi'(\bar{a}, x) = \psi(\bar{a})$. \square

Wir gehen also vom Erzeugnis A_0 der leeren Menge in \mathfrak{B} aus und schließen sukzessive A_0 gegen alle Existenzforderungen in Teilausdrücken von φ ab. Das Ergebnis A kann man als eine Art Erzeugnis $\langle \varphi \rangle_{\mathfrak{B}}$ von φ in \mathfrak{B} ansehen. Man beachte, dass wir lediglich eine abzählbare Folge A_n , $n < \omega$ von Mengen definieren müssen, da in jeder Teilformel von φ nur endlich viele Variablen frei vorkommen.

Definition 5.3. Der *Quantorenrang* $\text{qr}(\psi) \in \text{On}$ einer Formel $\psi \in L_{\infty\omega}$ ist induktiv wie folgt definiert.

- $\text{qr}(\psi) = 0$, falls ψ atomar ist.
- $\text{qr}(\neg\psi) = \text{qr}(\psi)$.
- $\text{qr}(\exists x\psi) = \text{qr}(\forall x\psi) = \text{qr}(\psi) + 1$.
- $\text{qr}(\bigvee \Phi) = \text{qr}(\bigwedge \Phi) = \sup\{\text{qr}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}$.

So haben wir beispielsweise $\text{qr}(\varphi_{\text{fin}}) = \omega$. Mit Quantorenrang $\omega + 1$ können wir in $L_{\omega_1\omega}(<)$ ausdrücken, dass jedes Element in einer Ordnung nur endlich viele Vorgänger hat. Wie man leicht sieht, kann man nämlich eine Formel $\varphi(x) \in L_{\omega_1\omega}(<)$ mit einer freien Variablen x und Quantorenrang ω angeben, die besagt, dass x bezüglich $<$ nur endlich viele Vorgänger hat. Damit ist $\forall x\varphi(x)$ eine Formel vom Quantorenrang $\omega + 1$, die besagt, dass jedes Element nur endlich viele Vorgänger bezüglich $<$ hat.

Definition 5.4. Es seien \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zwei τ -Strukturen für eine Signatur τ und α sei eine Ordinalzahl. Wir schreiben $\mathfrak{A} \equiv_{\alpha} \mathfrak{B}$, wenn für alle infinitären Sätze $\varphi \in L_{\infty\omega}(\tau)$ mit $\text{qr}(\varphi) \leq \alpha$ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt, wenn auch $\mathfrak{B} \models \varphi$ gilt.

Definition 5.5. Sei τ eine relationale Signatur und \mathfrak{A} sowie \mathfrak{B} seien τ -Strukturen. Ein *lokaler Isomorphismus* von \mathfrak{A} nach \mathfrak{B} ist eine Abbildung $p : \text{Def}(p) \subseteq A \rightarrow B$, so dass $p : \langle \text{Def}(p) \rangle_{\mathfrak{A}} \rightarrow \langle \text{Bild}(p) \rangle_{\mathfrak{B}}$ ein Isomorphismus ist. Mit $\text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bezeichnen wir die Menge aller lokalen Isomorphismen von \mathfrak{A} nach \mathfrak{B} .

Man beachte, dass $\langle \text{Def}(p) \rangle_{\mathfrak{A}}$ gerade $\text{Def}(p)$ als Universum hat und $\langle \text{Bild}(p) \rangle_{\mathfrak{B}}$ entsprechend $\text{Bild}(p)$ als Universum hat, da τ als relational angenommen wurde. Insbesondere ist $\emptyset \in \text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Wir verwenden für lokale Isomorphismen häufig auch die Schreibweise $p : \bar{a} \rightarrow \bar{b}$ oder $p = \{(a_0, b_0), \dots, (a_n, b_n)\}$.

Das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel. Es sei τ eine relationale Signatur, \mathfrak{A} sowie \mathfrak{B} seien τ -Strukturen und $\alpha \in \text{On}$ sei eine Ordinalzahl. Das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $G_{\alpha}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wird von zwei Spielern, dem Herausforderer (I) und der Duplikatorin (II) nach folgenden Regeln gespielt.

- Eine Position ist ein Tupel $(\beta, \mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ mit $\beta \leq \alpha$, $\bar{a} \subseteq A$, $\bar{b} \subseteq B$ und $|\bar{a}| = |\bar{b}|$.
- Die Startposition ist $(\alpha, \mathfrak{A}, \emptyset, \mathfrak{B}, \emptyset)$.
- Ist das Spiel in einer Position $(\beta, \mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$, so wählt I ein $\gamma < \beta$ sowie ein $c \in A$ oder ein $d \in B$. Daraufhin antwortet II mit einem $d \in B$ oder einem $c \in A$ in der jeweils anderen Struktur. Die neue Position ist dann $(\gamma, \mathfrak{A}, \bar{a}c, \mathfrak{B}, \bar{b}d)$.
- Wird eine Position $(\beta, \mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ erreicht, so dass $\bar{a} \mapsto \bar{b} \notin \text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist, so ist die Partie beendet und I hat gewonnen.
- Andernfalls endet das Spiel in einer Position $(0, \mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ mit $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in \text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und II hat gewonnen.

Wir sagen, I (beziehungsweise II) gewinnt $G_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn I (beziehungsweise II) eine Gewinnstrategie für $G_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ (von der Startposition aus) hat.

Das Spiel $G_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wird wie $G_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gespielt, wobei die erste Komponente weggelassen wird und Partien unendlich lange dauern können. Unendliche Partien sind von II gewonnen.

Man beachte, dass die Spielgraphen sowohl von $G_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für $\alpha \in \text{On}$ als auch von $G_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ azyklisch sind. Dabei gibt es in dem Spielgraphen von $G_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für jedes $\alpha \in \text{On}$ beliebig lange Pfade, jedoch keinen unendlichen Pfad. (Man beachte, dass dieser Graph für unendliche α unendlich verzweigt ist.) Im Spielbaum von $G_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gibt es hingegen nach Definition auch unendliche Pfade.

Das Spiel $G_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ entspricht also gerade dem üblichen Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel für die Logik erster Stufe, in dem der Herausforderer eine natürliche Zahl $m < \omega$ wählt, woraufhin das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ genau m Züge lang gespielt wird. Hingegen bietet bereits das Spiel $G_{\omega+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ dem Herausforderer eine fundamental neue Möglichkeit. Er kann sein erstes Element wählen und dann *in Abhängigkeit der ersten Antwort der Duplikatorin* eine endliche Zahl m von Zügen wählen, die daraufhin gespielt werden. So gewinnt zum Beispiel die Duplikatorin das Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = G_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ mit $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{Z} \times \{1\}, <)$, das heißt $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$. Das Spiel $G_{\omega+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt hingegen der Herausforderer.

Bemerkung 5.4. *Ist $\alpha \in \text{On}$ ein Limesordinal, so gewinnt II das Spiel $G_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ genau dann, wenn II für alle $\beta < \alpha$ das Spiel $G_\beta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.*

Man beachte, dass aus den vorangegangenen Überlegungen hervorgeht, dass diese Aussage im Allgemeinen tatsächlich nur für Limesordinale gilt, nicht aber für Nachfolgerordinale.

Hin- und Her-Systeme. Es sei τ eine relationale Signatur, \mathfrak{A} sowie \mathfrak{B} seien τ -Strukturen, $I \subseteq \text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ sei eine Menge von partiellen Isomorphismen von \mathfrak{A} nach \mathfrak{B} und es sei $p \in \text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

- (a) Der partielle Isomorphismus p hat die Hin- und Her-Eigenschaft (HHE) bezüglich I , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.
- Hin: Für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$, so dass $p \cup \{(a, b)\} \in I$.
 - Her: Für alle $b \in B$ gibt es ein $a \in A$, so dass $p \cup \{(a, b)\} \in I$.

- (b) Das Hin-und Her-System $(I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}))_{\alpha \in \text{On}}$ für \mathfrak{A} und \mathfrak{B} besteht aus den Mengen $I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \subseteq \text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, welche wie folgt definiert sind.
- $I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) := \{p \in \text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \mid p \text{ ist endlich}\}$.
 - $I_{\alpha+1} := \{p \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \mid p \text{ hat die HHE bezüglich } I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\}$ für $\alpha \in \text{On}$.
 - $I_\lambda := \bigcap_{\alpha < \lambda} I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für Limesordnalen λ .

Die Mengen $I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ formen also eine absteigende Mengenfolge $I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \supseteq I_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \supseteq \dots \supseteq I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \supseteq I_{\alpha+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \supseteq \dots$. Somit gibt es ein $\alpha \leq |I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})|$ mit $I_{\alpha+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wobei $|I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})| \leq \max\{|A|, |B|, \omega\}$ gilt. Dieses $I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bezeichnen wir mit $I_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Bemerkung 5.5. *Ist $p \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $q \subseteq p$, so gilt auch $q \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.*

Man kann diese Bemerkung sehr leicht per Induktion nach α beweisen. Insbesondere haben wir damit natürlich für jedes $\alpha \in \text{On}$, dass $I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \emptyset$ genau dann gilt, wenn $\emptyset \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist.

Definition 5.6. Es sei τ eine relationale Signatur, \mathfrak{A} sowie \mathfrak{B} seien τ -Strukturen und $\alpha \in \text{On}$ sei eine Ordinalzahl.

- (1) Wir schreiben $\mathfrak{A} \cong_\alpha \mathfrak{B}$, wenn $I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \emptyset$ ist.
- (2) Wir schreiben $\mathfrak{A} \cong_\infty \mathfrak{B}$, wenn $I_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \emptyset$ ist.

Wir wollen uns nun zwei einfache Beispiele ansehen. Zunächst sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{Q}, <)$. Eine Abbildung $p : \bar{a} \mapsto \bar{b}$ endlicher Tupel $\bar{a} \subseteq A$ und $\bar{b} \subseteq B$ ist natürlich genau dann ein partieller Isomorphismus, wenn p ordnungserhaltend ist, das heißt $I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \{\bar{a} \mapsto \bar{b} \mid a_i < a_k \Leftrightarrow b_i < b_k \text{ für alle } i, k\}$. Nun betrachten wir eine beliebige solche Abbildung $p : \bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Dann hat p trivialerweise die Hin-Eigenschaft, da \mathfrak{B} eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte ist. Hingegen hat p nur dann die Her-Eigenschaft, wenn für je zwei Elemente $a_i, a_k \in \bar{a}$ ein Element $a \in A$ existiert mit $a_i < a < a_k$, da für je zwei Elemente aus \bar{b} ein solches Element stets existiert. Also ist $I_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \{\bar{a} \mapsto \bar{b} \mid |a_i - a_k| \geq 2 \text{ für alle } i \neq k\}$. Nun betrachten wir wiederum eine beliebige solche Abbildung $p : \bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. In diesem Fall hat nun p trivialerweise die Her-Eigenschaft, da man zu einem endlichen Tupel $\bar{a} \subseteq A$ mit $|a_i - a_k| \geq 2$ für alle $i \neq k$ stets ein $a \in A$ finden kann mit $|a - a_i| \geq 2$ für alle i . Hingegen hat p nicht mehr die Hin-Eigenschaft, falls $\bar{a} \neq \emptyset$ ist. Ist nämlich $a_i \in \bar{a}$ beliebig, so kann man trivialerweise $b \in B$ nicht derart wählen, dass $p \cup \{(a_i + 1, b)\} \in I_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gilt. Also ist $I_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \{\emptyset\}$ und somit $I_3(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \emptyset$. Damit gilt $\mathfrak{A} \cong_2 \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \not\cong_3 \mathfrak{B}$.

Nun sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{Q}, <)$. $I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist wiederum die Menge aller ordnungserhaltenden Abbildungen zwischen endlichen Tupeln gleicher Länge aus \mathfrak{A} und \mathfrak{B} . Da nun allerdings \mathfrak{A} in diesem Fall auch eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte ist, sieht man unmittelbar, dass jedes $p \in I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ die Hin-Eigenschaft sowie die Her-Eigenschaft bezüglich $I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat, das heißt es gilt $I_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und somit $I_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Folglich haben wir $\mathfrak{A} \cong_\infty \mathfrak{B}$.

Bemerkung 5.6. *Ist τ eine relationale Signatur und sind \mathfrak{A} sowie \mathfrak{B} τ -Strukturen, so gilt $\mathfrak{A} \cong_\infty \mathfrak{B}$ genau dann, wenn eine nichtleere Menge $I \subseteq \text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ existiert, so dass jedes $p \in I$ die HHE bezüglich I hat.*

Beweis. Gilt $\mathfrak{A} \cong_{\infty} \mathfrak{B}$, so hat $I := I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ offensichtlich die geforderten Eigenschaften. Existiert nun umgekehrt eine solche Menge, so setzen wir $J := \{p \in I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \mid p \subseteq q \text{ für ein } q \in I\}$. (Man beachte, dass die lokalen Isomorphismen in I nicht notwendigerweise endlich sind.) Dann ist $J \neq \emptyset$ und $J \subseteq I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und jedes $p \in J$ hat die HHE bezüglich J und somit bezüglich jeder Menge $J \subseteq K \subseteq \text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Also ist $J \subseteq I_{\alpha}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für alle $\alpha \in \text{On}$ und also haben wir $\emptyset \neq J \subseteq I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. \square

Bemerkung 5.7. *Sei τ eine relationale Signatur, \mathfrak{A} sowie \mathfrak{B} τ -Strukturen, so dass A und B abzählbar sind und gelte $\mathfrak{A} \cong_{\infty} \mathfrak{B}$. Dann gilt $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Beweis. Wir betrachten Aufzählungen $(a_n)_{n < \omega}$ von A sowie $(b_n)_{n < \omega}$ von B und konstruieren eine Kette $(p_n)_{n < \omega}$ von partiellen Isomorphismen $p_n \in I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ per Induktion über n wie folgt. Zunächst setzen wir $p_0 := \emptyset \in I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Nun sei $n < \omega$, so dass $p_n \in I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bereits konstruiert ist. Dann hat p_n die Hin-Eigenschaft bezüglich $I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, also existiert ein $b \in B$, so dass $p_n \cup \{(a_n, b)\} \in I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Ferner hat p_n die Her-Eigenschaft bezüglich $I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, also existiert ein $a \in A$, so dass $p_{n+1} := p_n \cup \{(a_n, b)\} \cup \{(a, b_n)\} \in I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist. Für alle $n < \omega$ gilt nun $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq \text{Def}(p_n)$ und $\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subseteq \text{Bild}(p_n)$. Setzen wir nun $p := \bigcup_{n < \omega} p_n$, so ist damit offensichtlich p ein Isomorphismus zwischen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} . \square

Man beachte, dass es hier nicht genügt, lediglich zu fordern, dass eines der Universen abzählbar ist. So gilt zum Beispiel $(\mathbb{Q}, <) \equiv_{\infty} (\mathbb{R}, <)$, aber aus Mächtigkeitsgründen sind die beiden Strukturen nicht isomorph.

Wir wollen nun auf die Charakterisierung der Äquivalenzrelationen \equiv_{α} beziehungsweise \equiv_{∞} durch die Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele G_{α} beziehungsweise G_{∞} und die Relationen \cong_{α} beziehungsweise \cong_{∞} hinarbeiten. Dazu klären wir zunächst den Zusammenhang zwischen den Spielen G_{α} und den Relationen \cong_{α} .

Bemerkung 5.8. *Seien τ eine relationale Signatur, \mathfrak{A} sowie \mathfrak{B} τ -Strukturen, und seien $\bar{a} \subseteq A$ sowie $\bar{b} \subseteq B$ endliche Tupel gleicher Länge. Dann gewinnt II das Spiel $G_{\alpha}(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ genau dann, wenn $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{\alpha}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach α . Zunächst gewinnt II das Spiel $G_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ per Definition genau dann, wenn $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in \text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist, was wegen der Endlichkeit von \bar{a} und \bar{b} äquivalent ist zu $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Nun sei $\alpha \in \text{On}$ beliebig. Nehmen wir zunächst an, dass für alle $c \in A$ ein $d \in B$ existiert, so dass II das Spiel $G_{\alpha}(\mathfrak{A}, \bar{a}c, \mathfrak{B}, \bar{b}d)$ gewinnt und für alle $d \in B$ ein $c \in A$ existiert, so dass II das Spiel $G_{\alpha}(\mathfrak{A}, \bar{a}c, \mathfrak{B}, \bar{b}d)$ gewinnt. Man bemerke nun, dass wenn II ein Spiel $G_{\alpha}(\mathfrak{A}, \bar{a}c, \mathfrak{B}, \bar{b}d)$ gewinnt, dann offenbar auch alle Spiele $G_{\beta}(\mathfrak{A}, \bar{a}c, \mathfrak{B}, \bar{b}d)$ mit $\beta \leq \alpha$. Somit haben wir in diesem Fall, dass unabhängig des Zuges den I macht, II eine Antwort auf diesen Zug hat, so dass II von der nachfolgenden Position wieder eine Gewinnstrategie hat. Also hat II eine Gewinnstrategie für $G_{\alpha+1}(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$. Gewinnt umgekehrt II das Spiel $G_{\alpha+1}(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$, so muss II gerade auf jeden Zug von I eine Antwort haben, so dass II von der nachfolgenden Position wieder eine Gewinnstrategie hat. Also muss für alle $c \in A$ ein $d \in B$ existieren, so dass II das Spiel $G_{\alpha}(\mathfrak{A}, \bar{a}c, \mathfrak{B}, \bar{b}d)$ gewinnt und für alle $d \in B$ muss ein $c \in A$ existieren, so dass II das Spiel $G_{\alpha}(\mathfrak{A}, \bar{a}c, \mathfrak{B}, \bar{b}d)$ gewinnt.

Nach Induktionsvoraussetzung bedeutet dies nun gerade, dass für alle $c \in A$ ein $d \in B$ existiert, so dass $\bar{a}c \mapsto \bar{b}d \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist und für alle $d \in B$ ein $c \in A$ existiert, so dass $\bar{a}c \mapsto \bar{b}d \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist. Nach Bemerkung 5.5 ist das wiederum äquivalent dazu, dass $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist und ferner $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ die HHE bezüglich $I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat. Dies ist nach Definition von $I_{\alpha+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ genau dann der Fall, wenn $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{\alpha+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist.

Ist nun schließlich α ein Limesordinal, so gewinnt II nach Bemerkung 5.4 das Spiel $G_\alpha(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ genau dann, wenn II für alle $\beta < \alpha$ das Spiel $G_\beta(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ gewinnt. Dies ist nach Induktionsvoraussetzung äquivalent dazu, dass $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_\beta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für alle $\beta < \alpha$ gilt. Das bedeutet nach Definition von $I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ nun aber gerade $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. \square

Wählt man nun speziell $\bar{a} = \bar{b} = \emptyset$, so gewinnt also II das Spiel $G_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ genau dann, wenn $\emptyset \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist, das heißt, wenn $\mathfrak{A} \cong_\alpha \mathfrak{B}$ gilt.

Satz 5.2. *Seien τ eine relationale Signatur, \mathfrak{A} eine τ -Struktur, $\bar{a} \in A^n$ für ein $n < \omega$ und $\alpha \in \text{On}$. Dann gibt es eine Formel $\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^\alpha(\bar{x}) \in L_{\infty\omega}(\tau)$ mit $\text{qr}(\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^\alpha) = \alpha$, so dass für alle τ -Strukturen \mathfrak{B} und alle $\bar{b} \in B^n$ genau dann $\mathfrak{B} \models \psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^\alpha(\bar{b})$ gilt, wenn $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist.*

Beweis. Wir konstruieren die gesuchten Formeln per Induktion über α . Für $\alpha = 0$ sei $\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^0 := \bigwedge \Phi$, wobei Φ die Menge aller atomaren und negiert atomaren Formeln $\varphi(\bar{x})$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ sei. Dann ist $\text{qr}(\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^0) = 0$ und $\mathfrak{B} \models \psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^0(\bar{b})$ gilt genau dann, wenn (\mathfrak{A}, \bar{a}) und (\mathfrak{B}, \bar{b}) die gleichen atomaren und negiert atomaren Sätze erfüllen, das heißt genau dann, wenn $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist.

Nun sei $\alpha \in \text{On}$ beliebig und für $\beta \leq \alpha$ seien die gesuchten Formeln bereits konstruiert. Sei $\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^{\alpha+1}(\bar{x}) = \bigwedge \{ \exists y \psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}c}^\alpha(\bar{x}, y) \mid c \in A \} \wedge \forall y \bigvee \{ \psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}c}^\alpha(\bar{x}, y) \mid c \in A \}$. Dann ist zunächst $\text{qr}(\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^{\alpha+1}) = \alpha + 1$. Ist nun \mathfrak{B} eine beliebige τ -Struktur und $\bar{b} \in B^n$, so gilt $\mathfrak{B} \models \psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^{\alpha+1}(\bar{b})$ genau dann, wenn für alle $c \in A$ ein $d \in B$ existiert mit $\mathfrak{B} \models \psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}c}^\alpha(\bar{b}d)$ und für alle $d \in B$ ein $c \in A$ existiert mit $\mathfrak{B} \models \psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}c}^\alpha(\bar{b}d)$. Dies ist nach Induktionsvoraussetzung äquivalent dazu, dass für alle $c \in A$ ein $d \in B$ existiert, so dass $\bar{a}c \mapsto \bar{b}d \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und für alle $d \in B$ ein $c \in A$ existiert mit $\bar{a}c \mapsto \bar{b}d \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Nach Definition von $I_{\alpha+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bedeutet dies gerade $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{\alpha+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Ist schließlich α ein Limesordinal und sind für $\beta < \alpha$ die gesuchten Formeln bereits konstruiert, so setzen wir $\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^\alpha(\bar{x}) := \bigwedge \{ \psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^\beta(\bar{x}) \mid \beta < \alpha \}$. Dann ist zunächst $\text{qr}(\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^\alpha) = \sup \{ \text{qr}(\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^\beta) \mid \beta < \alpha \} = \sup \{ \beta \mid \beta < \alpha \} = \alpha$. Ist nun \mathfrak{B} eine τ -Struktur und $\bar{b} \in B^n$, so gilt $\mathfrak{B} \models \psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^\alpha(\bar{b})$ genau dann, wenn $\mathfrak{B} \models \psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^\beta(\bar{b})$ für alle $\beta < \alpha$, das heißt $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_\beta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für alle $\beta < \alpha$ was nach Definition von $I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gerade äquivalent ist zu $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. \square

Bemerkung 5.9. *Es sei τ eine endliche relationale Signatur, $\alpha < \omega$ eine endliche Ordinalzahl sowie $n < \omega$. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Ist \mathfrak{A} eine τ -Struktur und $\bar{a} \in A^n$, so ist $\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^\alpha(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$.*
- (2) *Die Menge $\{ \psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^\alpha(\bar{x}) \mid \mathfrak{A} \tau\text{-Struktur, } \bar{a} \in A^n \}$ ist endlich.*

Beweis. Da τ endlich und relational ist, gibt es für jedes $n < \omega$ nur endlich viele atomare Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \text{FO}(\tau)$ mit höchstens n freien Variablen. Somit ist $\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^0(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ und es gibt nur endliche viele Formeln dieser Art. (Jede dieser Formeln ist die Konjunktion über eine Teilmenge einer festen, endlichen Menge.) Ist nun ferner die Menge $\{\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^\alpha(\bar{x}) \mid \mathfrak{A} \tau\text{-Struktur}, \bar{a} \in A^n\}$ für ein $\alpha < \omega$ endlich, so sieht man anhand der Definition von $\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^{\alpha+1}(\bar{x})$, dass $\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^{\alpha+1}(\bar{x}) \in \text{FO}(\tau)$ gilt und auch die Menge $\{\psi_{\mathfrak{A}, \bar{a}}^{\alpha+1}(\bar{x}) \mid \mathfrak{A} \tau\text{-Struktur}, \bar{a} \in A^n\}$ wiederum endlich ist. (Jede Formel dieser Art wird aus Formeln einer festen endlichen Menge gebildet.) Damit folgen (1) und (2) per Induktion über α . \square

Satz 5.3. *Seien τ eine relationale Signatur, \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zwei τ -Strukturen, $\bar{a} \in A^n$ sowie $\bar{b} \in B^n$ für ein $n < \omega$ und sei $\alpha \in \text{On}$. Wenn es eine Formel $\psi(\bar{x}) \in L_{\infty\omega}(\tau)$ gibt mit $\text{qr}(\psi) \leq \alpha$, so dass $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi(\bar{b})$, so gewinnt I das Spiel $G_\alpha(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung per Induktion über den Aufbau von ψ . Dabei sei ψ o.B.d.A. in Negationsnormalform. Ist zunächst ψ atomar oder negiert atomar, so ist wegen $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi(\bar{b})$ gerade $\bar{a} \mapsto \bar{b} \notin \text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, also gewinnt I nach Bemerkung 5.8 das Spiel $G_0(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$.

Sei nun $\psi(\bar{x}) = \bigwedge \Phi$ für eine Menge $\Phi \subseteq L_{\infty\omega}(\tau)$, so dass alle Formeln $\varphi(\bar{x}) \in \Phi$ die Behauptung bereits erfüllen. Dann gibt es wegen $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi(\bar{b})$ eine Formel $\varphi(\bar{x}) \in \Phi$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ und $\mathfrak{B} \models \neg\varphi(\bar{b})$. Nach Induktionsvoraussetzung gewinnt also I das Spiel $G_{\text{qr}(\varphi)}(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ und wegen $\text{qr}(\varphi) \leq \alpha$ gewinnt damit I auch $G_\alpha(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$. Ist $\psi(\bar{x}) = \bigvee \Phi$ für eine Menge $\Phi \subseteq L_{\infty\omega}(\tau)$, so zeigt man die Behauptung analog.

Nun sei $\psi(\bar{x}) = \exists y \varphi(\bar{x}, y)$ für ein $\varphi \in L_{\infty\omega}$, welches die Behauptung bereits erfüllt. Wegen $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ gibt es ein $c \in A$, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, c)$ und wegen $\mathfrak{B} \models \neg\psi(\bar{b})$ gilt $\mathfrak{B} \models \neg\varphi(\bar{b}, d)$ für alle $d \in B$. Sei nun $\beta = \text{qr}(\varphi) < \alpha$. Dann wählt I gerade β und c . Nach Induktionsvoraussetzung gewinnt nun I für jede Antwort $d \in B$ von II das Spiel $G_\beta(\mathfrak{A}, \bar{a}c, \mathfrak{B}, \bar{b}d)$, also gewinnt I das Spiel $G_\alpha(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$. Ist $\psi(\bar{x}) = \forall y \varphi(\bar{x}, y)$ für ein $\varphi \in L_{\infty\omega}$, so wählt I völlig analog $\beta = \text{qr}(\varphi)$ sowie ein $d \in B$ mit $\mathfrak{B} \models \neg\varphi(\bar{b}, d)$. \square

Korollar 5.1. *Sei τ eine relationale Signatur, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ -Strukturen sowie $\alpha \in \text{On}$ eine Ordinalzahl. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) $\mathfrak{A} \equiv_\alpha \mathfrak{B}$.
- (2) $\mathfrak{A} \cong_\alpha \mathfrak{B}$.
- (3) II gewinnt $G_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass (2) und (3) äquivalent sind. Gilt nun ferner $\mathfrak{A} \not\equiv_\alpha \mathfrak{B}$, so gibt es einen Satz $\varphi \in L_{\infty\omega}(\tau)$ mit $\text{qr}(\varphi) = \alpha$, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$ gilt. Nach Satz 5.3 gewinnt damit I das Spiel $G_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Folglich impliziert Aussage (3) Aussage (1). Gelte nun schließlich (1) und sei $\psi_{\mathfrak{A}}^\alpha \in L_{\infty\omega}(\tau)$ gemäß Satz 5.2 ein Satz mit $\text{qr}(\psi_{\mathfrak{A}}^\alpha) = \alpha$, so dass für alle τ -Strukturen \mathfrak{C} genau dann $\mathfrak{C} \models \psi_{\mathfrak{A}}^\alpha$ gilt, wenn $\emptyset \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ gilt, das heißt genau dann, wenn $\mathfrak{A} \cong_\alpha \mathfrak{C}$. Nun gilt trivialerweise $\mathfrak{A} \models \psi_{\mathfrak{A}}^\alpha$ und wegen $\text{qr}(\psi_{\mathfrak{A}}^\alpha) = \alpha$ und $\mathfrak{A} \equiv_\alpha \mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{B} \models \psi_{\mathfrak{A}}^\alpha$, also $\mathfrak{A} \cong_\alpha \mathfrak{B}$. Damit impliziert (1) schließlich auch (2). \square

Satz 5.4. *Sei τ eine relationale Signatur und seien \mathfrak{A} sowie \mathfrak{B} τ -Strukturen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) $\mathfrak{A} \equiv_{\infty} \mathfrak{B}$.
- (2) $\mathfrak{A} \cong_{\infty} \mathfrak{B}$.
- (3) *II gewinnt $G_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.*

Beweis. Gelte zunächst (2), das heißt $I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \emptyset$. Um (3) nachzuweisen müssen wir zeigen, dass II eine Strategie für $G_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat, so dass jede Partie, die mit dieser Strategie kompatibel ist, unendlich lange dauert. Betrachten wir dazu eine beliebige Position $(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ im Spiel. Gilt dann $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, so gibt es für alle $c \in A$ ein $d \in B$, so dass $\bar{a}c \mapsto \bar{b}d \in I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist, und für alle $d \in B$ gibt es ein $c \in A$, so dass $\bar{a}c \mapsto \bar{b}d \in I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist. Wegen $\emptyset \in I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ folgt daraus unmittelbar die Existenz der gewünschten Strategie für II.

Gelte nun (1) nicht. Dann gibt es einen Satz $\psi \in L_{\infty\omega}(\tau)$ mit $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi$. Ist nun $\text{qr}(\psi) = \alpha$, so folgt aus Satz 5.3 unmittelbar, dass I das Spiel $G_{\alpha}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt. Damit gewinnt I trivialerweise auch das Spiel $G_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Also impliziert Aussage (3) Aussage (1).

Gelte nun schließlich (1) und sei $\alpha \in \text{On}$ beliebig. Dann haben wir insbesondere $\mathfrak{A} \equiv_{\alpha} \mathfrak{B}$, also nach Korollar 5.1 $\mathfrak{A} \cong_{\alpha} \mathfrak{B}$, das heißt $I_{\alpha}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \emptyset$. Also gilt $I_{\alpha}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in \text{On}$ und also $I_{\infty}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \emptyset$, das heißt $\mathfrak{A} \cong_{\infty} \mathfrak{B}$. \square

Als eine erste Anwendung dieser Charakterisierung wollen wir uns folgendes Resultat ansehen, welches einen Zusammenhang mit der ω -Saturiertheit herstellt.

Satz 5.5. *Sei τ eine relationale Signatur und seien \mathfrak{A} sowie \mathfrak{B} zwei ω -saturierte τ -Strukturen. Dann gilt genau dann $\mathfrak{A} \equiv_{\omega} \mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A} \equiv_{\infty} \mathfrak{B}$ gilt.*

Beweis. Trivialerweise folgt $\mathfrak{A} \equiv_{\omega} \mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A} \equiv_{\infty} \mathfrak{B}$, gelte also umgekehrt $\mathfrak{A} \equiv_{\omega} \mathfrak{B}$. Wir setzen $I = \{\bar{a} \mapsto \bar{b} \mid \text{tp}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/\emptyset) = \text{tp}_{\mathfrak{B}}(\bar{b}/\emptyset)\}$ und bemerken zunächst, dass $I \subseteq I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gilt. Sei nun $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I$ beliebig. Wir zeigen, dass $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ die HHE bezüglich I hat. Sei dazu zunächst $c \in A$ beliebig. Wegen $\text{tp}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/\emptyset) = \text{tp}_{\mathfrak{B}}(\bar{b}/\emptyset)$ haben wir $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b})$. Da \mathfrak{B} ω -saturiert ist, gibt es nach Satz 4.1 ein $d \in B$ mit $(\mathfrak{A}, \bar{a}c) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b}d)$. Folglich gilt $\text{tp}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}c/\emptyset) = \text{tp}_{\mathfrak{B}}(\bar{b}d/\emptyset)$ und also ist $\bar{a}c \mapsto \bar{b}d \in I$. Damit haben wir die Hin-Eigenschaft gezeigt, die Her-Eigenschaft zeigt man analog unter Benutzung der ω -Saturiertheit von \mathfrak{A} .

Schließlich haben wir nach Voraussetzung $\mathfrak{A} \equiv_{\omega} \mathfrak{B}$, das heißt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ und also $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$. Damit gilt $\text{tp}_{\mathfrak{A}}(\emptyset/\emptyset) = \text{tp}_{\mathfrak{B}}(\emptyset/\emptyset)$, wir haben also $\emptyset \in I$. Somit ist I nicht leer und alle lokalen Isomorphismen in I haben die HHE bezüglich I . Folglich haben wir $\mathfrak{A} \cong_{\infty} \mathfrak{B}$, das heißt $\mathfrak{A} \equiv_{\infty} \mathfrak{B}$. \square

Wir wollen nun die Charakterisierung der Äquivalenzrelationen \equiv_{α} durch die Äquivalenzrelationen \cong_{α} verwenden, um zu zeigen, dass die Klasse aller Strukturen $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ der Signatur $\{<\}$, so dass $<^{\mathfrak{A}}$ eine Wohlordnung auf A ist, nicht $L_{\infty\omega}$ -axiomatisierbar ist.

Zunächst wollen wir uns überlegen, dass die Klasse nicht FO-axiomatisierbar ist. Dann werden wir sehen, dass für jede Ordinalzahl α die Klasse der Wohlordnungen vom Isomorphietyp $(\alpha, <)$ durch einen $L_{\infty\omega}$ -Satz definierbar ist. Schließlich werden

wir uns überlegen, wie wir die Technik, die wir verwendet haben, um die Nicht-Axiomatisierbarkeit in FO nachzuweisen, für die infinitäre Logik $L_{\infty\omega}$ adaptieren können.

Satz 5.6. *Es gibt keinen Satz $\psi \in \text{FO}(<)$, so dass für jede $<$ -Struktur $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ genau dann $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt, wenn $<^{\mathfrak{A}}$ auf A eine Wohlordnung ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, <) + (\mathbb{Z}, <)$, das heißt $n < k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ und $<$ ist auf \mathbb{N} und auf \mathbb{Z} definiert wie üblich. Dann ist \mathfrak{A} eine Wohlordnung, \mathfrak{B} ist jedoch keine Wohlordnung. Wir definieren nun auf \mathfrak{A} und auf \mathfrak{B} jeweils eine Distanz d auf die offensichtliche Art und Weise: Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist $d(n, k) = \omega$, ansonsten ist $d(n, k) = |n - k|$. Ferner schreiben wir $s =_k t$ für $s, t, k \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, falls $s = t$ oder $s \geq k$ und $t \geq k$. Per Induktion nach n zeigt man nun, dass für alle $n < \omega$ die Menge $I_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ alle solchen endlichen lokalen Isomorphismen $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ enthält, welche folgende Bedingungen erfüllen: $a_0 < a_1 \dots < a_{n-1}$ und $b_0 < b_1 < \dots < b_{n-1}$ sowie $a_0 =_{2^n} b_0$ und $a_{i+1} - a_i =_{2^n} b_{i+1} - b_i$ für alle $i \in \{0, \dots, n-2\}$. Damit gilt nun aber offensichtlich $\emptyset \in I_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für alle $n < \omega$, also ist $\emptyset \in I_{\omega}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \bigcap_{n < \omega} I_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und also haben wir $\mathfrak{A} \cong_{\omega} \mathfrak{B}$. Somit gilt für jeden Satz $\varphi \in L_{\infty\omega}(<)$ mit $\text{qr}(\varphi) < \omega$ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi$, wenn $\mathfrak{B} \models \varphi$ gilt. Insbesondere gilt dies somit für alle Sätze $\varphi \in \text{FO}(\tau)$, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Bemerkung 5.10. *Für jede Ordinalzahl $\alpha \in \text{On}$ existiert ein Satz $\varphi_{\alpha} \in L_{|\alpha|+\omega}(<)$ mit $\text{qr}(\varphi_{\alpha}) \leq \alpha + 1$, so dass für jede lineare Ordnung $\mathfrak{A} = (A, <)$ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi_{\alpha}$ gilt, wenn $\mathfrak{A} \cong (\alpha, <)$ ist.*

Beweis. Zunächst sei $\varphi_0 := \neg\exists x(x = x)$. Nun sei $\alpha \in \text{On}$ beliebig und seien die Formeln φ_{β} für $\beta < \alpha$ bereits konstruiert. Für eine Formel $\varphi \in \text{FO}(<)$ und eine Variable x bezeichnen wir nun mit $\varphi^{(x)}$ diejenige Formel, welche aus φ entsteht, indem alle Quantoren auf Elemente kleiner als x relativiert sind. Das heißt jede Teilformel $\exists u \vartheta(u)$ von φ wird ersetzt durch $\exists u(u < x \wedge \vartheta(u))$ und jede Teilformel $\forall u \vartheta(u)$ von φ wird ersetzt durch $\forall u(u < x \rightarrow \vartheta(u))$. Per Induktion über den Aufbau von φ zeigt man nun leicht, dass damit für jede lineare Ordnung $\mathfrak{A} = (A, <)$ und jedes $a \in A$ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi^{(a)}$ gilt, wenn $(\{b \in A \mid b < a\}, <) \models \varphi$ gilt.

Wir definieren nun $\varphi_{\alpha} := \forall x \bigvee \{\varphi_{\beta}^{(x)} \mid \beta < \alpha\} \wedge \bigwedge \{\exists x \varphi_{\beta}^{(x)} \mid \beta < \alpha\}$ und betrachten eine beliebige lineare Ordnung $\mathfrak{A} = (A, <)$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi_{\alpha}$ genau dann, wenn für alle $a \in A$ ein $\beta < \alpha$ existiert mit $\mathfrak{A} \models \varphi_{\beta}^{(a)}$ und für alle $\beta < \alpha$ ein $a \in A$ existiert mit $\mathfrak{A} \models \varphi_{\beta}^{(a)}$. Wie wir bereits bemerkt haben, ist dies äquivalent dazu, dass für alle $a \in A$ ein $\beta < \alpha$ existiert mit $(\{b \in A \mid b < a\}, <) \models \varphi_{\beta}$ und für alle $\beta < \alpha$ ein $a \in A$ existiert mit $(\{b \in A \mid b < a\}, <) \models \varphi_{\beta}$. Nach Induktionvoraussetzung bedeutet dies nun gerade, dass für alle $a \in A$ ein $\beta < \alpha$ existiert mit $(\{b \in A \mid b < a\}, <) \cong (\beta, <)$ und für alle $\beta < \alpha$ ein $a \in A$ existiert mit $(\{b \in A \mid b < a\}, <) \cong (\beta, <)$. Also gilt $(A, <) \cong (\alpha, <)$. Ferner haben wir $\text{qr}(\varphi_{\alpha}) = \sup\{\text{qr}(\varphi_{\beta}) \mid \beta < \alpha\} + 1 \leq \sup\{\beta + 1 \mid \beta < \alpha\} + 1 = \alpha + 1$. \square

Nun wollen wir zeigen, dass die Klasse der Wohlordnungen nicht durch einen Satz der infinitären Logik $L_{\infty\omega}(<)$ axiomatisiert werden kann. (Man beachte, dass

$\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \text{On}\}$ keine Menge ist.) Für lineare Ordnungen $(A, <)$ und $(B, <)$ schreiben wir nun im Folgenden $(A, <) \cdot (B, <) := (A \times B, <)$, wobei $<$ auf $A \times B$ die lexikografische Ordnung bezüglich $<$ auf B zuerst und $<$ auf A dann sei, das heißt $(a, b) < (a', b')$, wenn $b < b'$ oder $b = b'$ und $a < a'$. Intuitiv gesprochen besteht also die lineare Ordnung $(A, <) \cdot (B, <)$ aus B vielen isomorphen Kopien von $(A, <)$, linear hintereinander geschrieben. Man kann nun leicht zeigen, dass $(A, <) \cdot (B, <)$ für Wohlordnungen $(A, <)$ und $(B, <)$ selbst wieder eine Wohlordnung ist. Sind also $\alpha, \beta \in \text{On}$ Ordinalzahlen, so ist $(\alpha, <) \cdot (\beta, <)$ wiederum isomorph zu genau einer Wohlordnung der Form $(\gamma, <)$ mit $\gamma \in \text{On}$ und man kann zeigen, dass $\gamma = \alpha \cdot \beta$ ist bezüglich der üblichen Ordinalzahlmultiplikation. Wir können damit nun die Idee für den Beweis von Satz 5.6 verallgemeinern.

Satz 5.7. *Für jede Ordinalzahl $\alpha \in \text{On}$ gibt es eine Ordinalzahl $\delta \in \text{On}$ mit $\delta > \alpha$, so dass $(\delta, <) \equiv_\alpha (\delta, <) + (\delta, <) \cdot (\mathbb{Z}, <)$.*

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $\mathfrak{A} := (\delta, <)$ und $\mathfrak{B} := (\delta, <) + (\delta, <) \cdot (\mathbb{Z}, <)$. Wir werden den Beweis hier lediglich skizzieren, so dass die Gültigkeit der Aussage letztlich überzeugend dargelegt ist. Dazu überlege man sich zunächst, dass ein $\delta > \alpha$ existiert, so dass bezüglich der Ordinalzahlarithmetik $\omega^\alpha \cdot \delta = \delta$ gilt. Dann gilt natürlich auch $\omega^\beta \cdot \delta = \delta$ für alle $\beta \leq \alpha$, also haben wir $\mathfrak{A} \cong (\omega^\beta, <) \cdot (\delta, <)$ für alle $\beta \leq \alpha$. Das heißt, für beliebige $\beta \leq \alpha$ lässt sich \mathfrak{A} in (δ) viele disjunkte Intervalle des Typs ω^β zerlegen. Damit lässt sich natürlich auch \mathfrak{B} als disjunkte Vereinigung isomorpher Kopien von \mathfrak{A} in disjunkte Intervalle des Typs ω^β zerlegen. Für $\beta \leq \alpha$ sei nun J_β die Menge aller endlichen lokalen Isomorphismen $p : \bar{a} \rightarrow \bar{b}$ mit $a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}$, so dass für alle $i \in \{0, \dots, n-2\}$ folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (1) a_i und a_{i+1} liegen im selben ω^β Intervall von \mathfrak{A} genau dann, wenn b_i und b_{i+1} im selben ω^β Intervall von \mathfrak{B} liegen.
- (2) a_i ist das Element γ seines ω^β Intervalls in \mathfrak{A} genau dann, wenn b_i das Element γ seines ω^β Intervalls in \mathfrak{B} ist.
- (3) a_0 liegt im ersten ω^β Intervall von \mathfrak{A} genau dann, wenn b_0 im ersten ω^β Intervall von \mathfrak{B} liegt.

Sei nun $\beta < \alpha$ und sei $p : \bar{a} \mapsto \bar{b} \in J_{\beta+1}$ mit $|\bar{a}| = |\bar{b}| = n$. Wir wollen zeigen, dass p die HHE bezüglich J_β hat. Wir zeigen dazu lediglich die Her-Eigenschaft, der Beweis der Hin-Eigenschaft verläuft analog. Sei also $b \in (\delta, <) + (\delta, <) \cdot (\mathbb{Z}, <)$ beliebig. Wenn in demjenigen Intervall vom Typ $\omega^{\beta+1}$ in \mathfrak{B} , in welchem b liegt, ein bereits gewähltes $b_i \in \bar{b}$ liegt, so wählen wir für a das entsprechende Element desjenigen Intervalls vom Typ $\omega^{\beta+1}$ in \mathfrak{A} , in welchem $a_i \in \bar{a}$ liegt. Wenn b zum ersten $\omega^{\beta+1}$ Intervall von \mathfrak{B} gehört, dann wählen wir für a das entsprechende Element des ersten $\omega^{\beta+1}$ Intervalls von \mathfrak{A} . Ist $b > b_{n-1}$, so finden wir ebenfalls ein entsprechendes a . Sei nun schließlich $b_i < b < b_{i+1}$ für bereits gewählte $b_i, b_{i+1} \in \bar{b}$ wobei b weder im $\omega^{\beta+1}$ Intervall von b_i noch im $\omega^{\beta+1}$ Intervall von b_{i+1} liege. Damit liegen natürlich b_i und b_{i+1} nicht im selben $\omega^{\beta+1}$ Intervall von \mathfrak{B} , also liegen nach Definition von $J_{\beta+1}$ auch a_i und a_{i+1} nicht im selben $\omega^{\beta+1}$ Intervall von \mathfrak{A} . Man kann sich nun überlegen, dass es damit ein ω^β Intervall in der Zerlegung von \mathfrak{A} in disjunkte ω^β Intervalle geben muss, welches zwischen den ω^β Intervallen von a_i und a_{i+1} liegt.

Wir wählen in diesem Fall nun a als dasjenige Element in diesem ω^β Intervall, welches b als Element eines ω^β Intervalls in der Zerlegung von \mathfrak{B} in disjunkte ω^β Intervalle entspricht. In jedem Fall haben wir mit unserer Wahl $p \cup \{(a, b)\} \in J_\beta$.

Nun gilt ferner offensichtlich $J_0 = I_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, also folgt per Induktion über β unmittelbar $J_\beta \subseteq I_\beta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für alle $\beta \leq \alpha$. Da per Definition von J_α trivialerweise $\emptyset \in J_\alpha$ gilt, folgt $\emptyset \in I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und also gilt $\mathfrak{A} \cong_\alpha \mathfrak{B}$. \square

Korollar 5.2. *Es gibt keinen Satz $\varphi \in L_{\infty\omega}(<)$, so dass für jede $<$ -Struktur $\mathfrak{A} = (A, <^\mathfrak{A})$ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt, wenn $<^\mathfrak{A}$ auf A eine Wohlordnung ist.*

Beweis. Nehmen wir an, dass ein solches φ existiert und sei $\alpha = \text{qr}(\varphi)$. Dann gilt für jede Ordinalzahl $\delta \in \text{On}$ gerade $(\delta, <) \models \varphi$ und $(\delta, <) + (\delta, <) \cdot (\mathbb{Z}, <) \models \neg\varphi$, im Widerspruch dazu, dass für hinreichend große $\delta > \alpha$ nach Satz 5.7 gilt, dass $(\delta, <) \equiv_\alpha (\delta, <) + (\delta, <) \cdot (\mathbb{Z}, <)$ ist. \square