Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala, R. Rabinovich

WS 2008/09

4. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 17. November um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 2 + 3 + 3 Punkte

(a) Geben Sie eine (die) Menge von kleinstem Rang an, welche keine Ordinalzahl ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Klasse X genau dann eine Menge ist, wenn die Klasse $\{\rho(x) \mid x \in X\}$ beschränkt, also in einer Stufe enthalten ist.

(c) Zeigen Sie, dass jede Ordinalzahl eindeutig darstellbar ist in der Form $\lambda + n$, wobei $n \in \omega$ und λ eine Limesordinalzahl oder 0 ist.

Aufgabe 2 6 Punkte

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $(((1 + \omega) + 1) + \omega) + 1$,

(b) $(((2 \cdot \omega) \cdot 2) \cdot \omega) \cdot 2$,

(c) $\sup\{\omega + n \mid n \in \omega\}$,

(d) $\sup\{\omega \cdot n + 3 \mid n \in \omega\}$,

(e) $(2 \cdot (\omega + 1)) \cdot \omega$,

(f) $\bigcup\{n \in \omega \mid n \text{ gerade}\}$,

Aufgabe 3 2 + 4 Punkte

Die Addition und die Multiplikation auf Ordinalen sind nicht kommutativ, deswegen sind je zwei verschiedene Definitionen für Subtraktion und Division mit Rest denkbar.

(a) Definieren Sie Subtraktion " $-$ " und Division mit Rest " $:$ " auf Ordinalzahlen und zeigen Sie, dass die Operationen eindeutig sind.

(b) Widerlegen Sie folgende Aussagen über Subtraktion und Division auf Ordinalen durch Gegenbeispiele:

(i) $\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma$,
(ii) $\alpha \cdot \alpha - \beta \cdot \beta = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta)$ für $\alpha \geq \beta$,
(iii) $(\alpha + \beta) - \beta = \alpha$,
(iv) $(\alpha \cdot \beta) : \beta = (\alpha, 0)$.

Aufgabe 4 4 Punkte

Wir betrachten folgende Umformulierungen des Auswahlaxioms:

AC*: Zu jeder Menge x gibt es eine Auswahlfunktion auf $\mathcal{P}(x)$.

KP: Für jede Familie $(X_i)_{i\in I}$ von nicht-leeren Mengen ist das kartesische Produkt $\Pi_{i\in I}X_i$ nicht leer.

ÄR: Jede Äquivalenzrelation über einer Menge x besitzt ein Repräsentantensystem.

(a) Präzisieren Sie die in diesen Aussagen verwendeten Begriffe.

(b) Zeigen Sie, dass **AC***, **KP** und **ÄR** zum Auswahlaxiom äquivalent sind (auf der Basis von ZF).

Aufgabe 5 3 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe des Auswahlaxioms, dass für alle Mengen a und b es eine injektive Funktion $f : a \to b$ oder $f : b \to a$ gibt.

Aufgabe 6* 6* Punkte

(a) Zeigen Sie, dass zu jeder Ordinalzahl α eine Limesordinalzahl $\lambda > \alpha$ existiert. *Hinweis:* Benutzen Sie den Rekursionssatz, um die Funktion $f : \omega \to \mathbb{S}$ mit $f(0) = \alpha$ und $f(n+1) = f(n) \cup \{f(n)\}$ zu definieren.

(b) Sei $(\mathbb{S}, \in)$ ein Modell von ZFC. Zeigen Sie, dass die Struktur $(S_{\omega+\omega}, \in)$ ein Modell von ZFC ohne das Ersetzungsaxiom ist, wobei das Ersetzungsaxiom nicht gilt.