Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger

SS 2005

3. Übung Mathematische Logik II

Abgabe bis Mittwoch, den 4. 5. um 11:30 Uhr in der Vorlesung oder am Lehrstuhl

Aufgabe 1

Zur Erinnerung: die von Neumannsche Hierarchie $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ ist definert durch $V_0 := \emptyset$, $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$ und $V_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ für Limeszahlen λ. V_ω ist die Menge der *hereditär endlichen* Mengen.

(a) Ist V_ω endlich, abzählbar, oder überabzählbar?

(b) Geben Sie eine Menge an die endlich, aber nicht hereditär endlich ist.

(c) Zeigen Sie, dass eine Menge hereditär endlich ist genau dann, wenn ihre transitive Hülle endlich ist.

(d) Der Graph $G = (V_\omega, E)$ sei durch Symmetrisierung von $(V_\omega, \in)$ definiert, d.h. $E := \{(a,b) \in V_\omega \times V_\omega : a \in b \text{ oder } b \in a\}$. Zeigen Sie, dass G folgende Erweiterungsaxiome erfüllt: Zu paarweise verschiedenen $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in V_\omega$ existiert immer ein $c \in V_\omega$, so dass $(a_i, c) \in E$ und $(b_j, c) \notin E$ für alle $i \leq m, j \leq n$.

Aufgabe 2

Geben Sie eine (die) Menge von kleinstem Rang an, welche keine Ordinalzahl ist.

Aufgabe 3

Wir betrachten folgende Umformulierungen des Auswahlaxioms:

AC*: Zu jeder Menge x gibt es eine Auswahlfunktion auf $\mathcal{P}(x)$.

KP: Für jede Familie $(X_i)_{i\in I}$ von nicht-leeren Mengen ist das kartesische Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ nicht leer.

ÄR: Jede Äquivalenzrelation über einer Menge x besitzt ein Repräsentantensystem.

(a) Präzisieren Sie die in diesen Aussagen verwendeten Begriffe.

(b) Zeigen Sie, dass **AC***, **KP** und **ÄR** zum Auswahlaxiom äquivalent sind (auf der Basis von ZF).

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass jede Ordinalzahl α eindeutig darstellbar ist in der Form $\alpha = \lambda + n$, wobei $n \in \omega$ und λ ein Limesordinal oder 0 ist.

Aufgabe 5

Ein Funktional $F : \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ ist *normal*, wenn es strikt aufsteigend und stetig ist, d.h. $\alpha < \beta \to F(\alpha) < F(\beta)$ und für jedes Limesordinal λ gilt

$$F(\lambda) = \bigcup\{F(\alpha) : \alpha < \lambda\}.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Für jedes feste Ordinal α ist das Funktional $F(\beta) := \alpha + \beta$ normal.
2. Jedes normale Funktional hat beliebig grosse Fixpunkte $\alpha = F(\alpha)$.