Aufgabe 1

(a) Welche der folgenden Sequenzen sind gültig?

(i) $\varphi(c) \;\Rightarrow\; \exists x \varphi(x)$;

(ii) $\exists x \forall y(\varphi \vee \psi) \;\Rightarrow\; \exists x \forall y \varphi \vee \exists x \forall y \psi$.

(b) Ist die folgende Schlussregel korrekt?

$$\frac{\Gamma,\ \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)) \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma,\ \varphi(c) \;\Rightarrow\; \Delta,\ \psi(c)}$$

Aufgabe 2

Welcher der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar? Welche endlich axiomatisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort, und geben Sie gegebenenfalls ein Axiomensystem an.

(a) Die Klasse der linearen Ordnungen, in denen über und unter jedem Element unendlich viele Elemente liegen.

(b) Die Klasse der linearen Ordnungen, deren Intervalle alle nicht dicht sind.

(c) Die Klasse der unendlichen linearen Ordnungen.

(d) Die Klasse der überabzählbaren linearen Ordnungen.

Aufgabe 3

Sei $\tau = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$ die Signatur der geordneten Körper. Ein geordneter Körper $\mathfrak{K}$ heißt *archimedisch*, wenn es zu jedem $a \in K$ eine natürliche Zahl n gibt mit $a < \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}}$. Beispiele solcher archimedischer Körper sind der geordnete Körper der rationalen und der geordnete Körper der reellen Zahlen.

Zeigen Sie, dass die Klasse der archimedischen Körper nicht FO-axiomatisierbar ist.