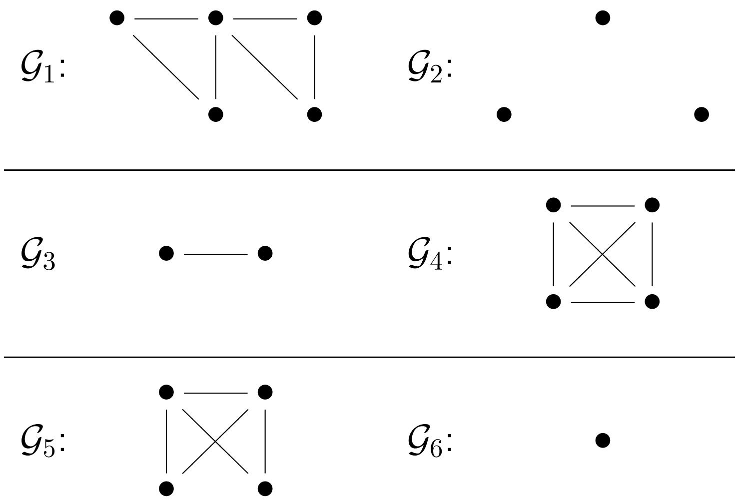
Aufgabe 1

Wir betrachten folgende Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$:



Bestimmen Sie, in welchen dieser Graphen folgende Sätze jeweils gelten:

$\varphi_1 := \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow Exy)$;

$\varphi_2 := \exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$;

$\varphi_3 := \exists x \forall y (x \neq y \rightarrow Exy)$;

$\varphi_4 := \exists x \forall y (\neg Exy)$.

Aufgabe 2

Drücken Sie folgende Sachverhalte über die Struktur $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, N)$ mit $N^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$ in der Prädikatenlogik aus:

(a) $x = 0$;

(b) x ist eine natürliche Zahl, die durch drei teilbar ist;

(c) x ist eine irrationale Zahl;

(d) es gibt beliebig kleine echt positive Zahlen.

Aufgabe 3

Sei φ eine $\mathrm{FO}(\tau)$-Formel. Das *Spektrum von* φ ist definiert als

$$\text{spec}(\varphi) := \{n \in \mathbb{N} \ : \ \text{ex. } \tau\text{-Struktur } \mathfrak{A} \text{ mit } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ und } |A| = n\}\,.$$

Im folgenden betrachten wir ausschließlich Mengen $A \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ als Spektren.

(a) Zeigen Sie:

  (i) $\emptyset$ und $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind Spektren einer $\emptyset$-Formel.

  (ii) Jede endliche Menge ist Spektrum einer $\emptyset$-Formel.

  (iii) Jede co-endliche Menge ist Spektrum einer $\emptyset$-Formel.

(b) Geben Sie eine Formel über einer geeigneten Signatur τ an, deren Spektrum die Menge der geraden Zahlen ist.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass es erfüllbare Formeln φ mit $\text{spec}(\varphi) = \emptyset$ gibt.