

2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 31.10. um 10:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

(a) Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (i) Gilt $\Phi \models \varphi$, dann auch $\Phi' \models \varphi$ für alle Obermengen $\Phi' \supseteq \Phi$.
- (ii) $\Phi \models \varphi$ gilt genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist.

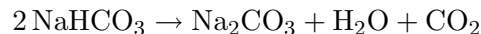
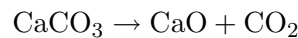
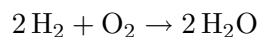
(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- (i) Aus $\Phi \cup \{\psi\} \models \varphi$ und $\Phi \cup \{\vartheta\} \models \varphi$ folgt $\Phi \cup \{\psi \vee \vartheta\} \models \varphi$.
- (ii) Sei $\Phi \models \varphi$. Dann gilt $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi$.
- (iii) Es gilt $\{\varphi, \psi\} \models \vartheta$ genau dann, wenn $\varphi \models \vartheta$ oder $\psi \models \vartheta$.

Aufgabe 2

10 Punkte

In einem Chemielabor stehen die Apparaturen zur Verfügung, um folgende chemische Reaktionen durchzuführen:



Ferner sind in dem Labor folgende Grundstoffe vorhanden: H_2 , O_2 , CaCO_3 , NaCl und NH_3 . Man beweise (durch geeignete Anwendung des Erfüllbarkeitsalgorithmus für Hornformeln), dass es unter diesen Voraussetzungen möglich ist, Na_2CO_3 herzustellen.

Aufgabe 3

10 Punkte

(a) Welche der folgenden Formeln sind zu einer Horn-Formel äquivalent? Verwenden Sie, dass die Menge der Modelle einer Hornformel unter Schnitt abgeschlossen ist (siehe Gruppenübung Nr. 2, Aufgabe 2).

- (i) $(X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow Z)$;
- (ii) $Y \vee ((X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z))$;
- (iii) $(X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow \neg Z)$;
- (iv) $\neg(X \rightarrow Y) \vee \neg(Y \rightarrow Z)$.

(b) Überprüfen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, ob nachstehende Folgerung gilt:

$$\{A \wedge B \rightarrow C, D \wedge E \rightarrow A, C \wedge F \rightarrow D, F \wedge D \rightarrow E\} \models B \vee C \vee (F \rightarrow B).$$

Aufgabe 4

10 Punkte

Sei Φ eine beliebige Menge aussagenlogischer Formeln. Eine Menge Ψ heißt Φ -*verwerfend*, wenn für alle Formeln $\varphi \in \text{AL}$ mit $\Phi \models \varphi$, gilt $\Psi \models \neg\varphi$. Zeigen Sie, dass jede Φ -verwerfende Menge Ψ äquivalent ist zu einer endlichen Teilmenge $\Psi_0 \subseteq \Psi$, d.h. für alle $\psi \in \Psi$, gilt $\Psi_0 \models \psi$.