Aufgabe 1

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, <, M)$, eine Expansion der geordneten Gruppe der reellen Zahlen mit einem einstelligen Relationssymbol M. Formulieren Sie folgende Sachverhalte in FO:

(i) M ist beschränkt;

(ii) $x = \inf(M)$;

(iii) x ist innerer Punkt von M;

(iv) M ist abgeschlossen.

Aufgabe 2

Bringen Sie folgende Formeln zunächst in Pränex-Normalform und dann in Skolem-Normalform:

(i) die Definition der Abgeschlossenheit aus Aufgabe 1;

(ii) $\forall x\big((\forall y Rxy \to Exu) \lor \forall z \exists v(\neg Rxz \land Evy)\big)$.

Aufgabe 3

(i) Sei τ eine Signatur und $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ eine $\mathrm{FO}(\tau)$-Formel. Definieren Sie das Konstrukt

$$\exists! x \varphi(x, y_1, \dots, y_n) \qquad \text{“es gibt genau ein } x\text{, so dass } \varphi\text{”}$$

in der Prädikatenlogik.

(ii) Sei $\psi(u, v)$ eine τ-Formel. Schreiben Sie einen Satz $\eta \in \mathrm{FO}$, der genau dann in einer τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt, wenn ein einziges Paar $(a, b) \in A^2$ existiert, so dass $\mathfrak{A} \models \psi(a, b)$.

(iii) Ist η zu einem der folgenden Sätze äquivalent?

$$\exists! u \exists! v \psi(u, v); \qquad \exists! v \exists! u \psi(u, v).$$