

11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 25.1. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder **vor Beginn** der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

12 Punkte

Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Axiomensystem an.

- (a) Die Klasse $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$ für eine feste endliche Struktur \mathfrak{A} .
- (b) Die Klasse aller zyklfreien ungerichteten Graphen.
- (c) Die Klasse aller ungerichteten Graphen vom Durchmesser höchstens 3, d. h. aller Graphen, von denen je zwei Knoten durch einen Pfad der Länge maximal 3 verbunden sind.
- (d) Die Klasse aller Äquivalenzstrukturen mit unendlich vielen Äquivalenzklassen.

Aufgabe 2

10 Punkte

Welche der folgenden Erweiterungen der Theorie T der linearen Ordnungen sind vollständig?

- (a) Die Theorie der unendlichen linearen Ordnungen;
- (b) die Theorie der diskreten linearen Ordnungen;
- (c) die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte (d.h., jedes Element hat genau einen direkten Nachfolger und genau einen direkten Vorgänger);
- (d) die Theorie $\{\psi : T, \varphi \models \psi\}$, wobei φ ein Satz ist, der besagt, dass es genau 13 Elemente gibt;
- (e) die Theorie der dichten linearen Ordnungen?

Aufgabe 3

6 Punkte

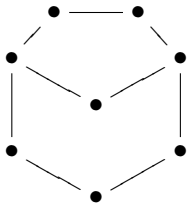
- (a) Sei $\mathfrak{A}_n = (A, E)$ eine Struktur mit einer Äquivalenzrelation E , welche unendlich viele Äquivalenzklassen hat, die alle die Größe n haben. Bestimmen Sie für alle Zahlen $m, n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, ob gilt $\mathfrak{A}_{n_0} \equiv_m \mathfrak{A}_{n_1}$.
- (b) Geben Sie für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und Äquivalenzrelationen E und F ein Kriterium dafür an, dass $(A, E) \not\equiv_m (B, F)$?

Aufgabe 4

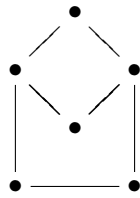
9 Punkte

Bestimmen Sie für die folgenden Strukturen jeweils die kleinste Zahl m , so dass im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ der Herausforderer gewinnt, in $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ aber die Duplikatorin. Geben Sie entsprechende Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin an.

(a) $\mathfrak{A} :=$



und $\mathfrak{B} :=$



(b) $\mathfrak{A} := (\{0, 1\}^*, \cdot)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, +)$, wobei \cdot der Graph der Konkatenation von Wörtern und $+$ der Graph der Addition ist;

(c) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, |)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{Z}, |)$.