Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

WS 2006/07

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 16.11. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung

Aufgabe 1 9 Punkte

Welche der folgenden Sequenzen sind gültig? Beweisen Sie Ihre Antworten semantisch, d. h. mit Hilfe von Interpretationen, und nicht durch Ableitungen im Sequenzenkalkül.

(i) $(X \rightarrow Z),\ (Y \rightarrow Z) \Rightarrow (X \vee Y) \rightarrow Z;$

(ii) $(X \rightarrow \neg Z),\ (Y \rightarrow \neg Z) \Rightarrow (X \leftrightarrow Y) \rightarrow Z;$

(iii) $(X \vee Y) \Rightarrow (Z \rightarrow \neg X) \rightarrow (Z \rightarrow Y).$

Aufgabe 2 6 Punkte

Konstruieren Sie für die folgenden Sequenzen Beweise im Sequenzenkalkül oder falsifizierende Interpretationen:

(i) $(X \vee Y),\ Y \rightarrow (Z \vee X) \Rightarrow X;$

(ii) $(X \vee Y),\ (\neg X \vee \neg Y) \Rightarrow (Z \rightarrow X) \rightarrow \neg(Y \wedge Z).$

Aufgabe 3 8 Punkte

Weisen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln nach, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \varphi \Rightarrow \Delta,\ \varphi}$

(ii) $\dfrac{\Gamma,\ \varphi \Rightarrow \Delta,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$

(iii) $\dfrac{\Gamma,\ \varphi \Rightarrow \Delta,\ \psi \quad \Gamma,\ \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \varphi \Rightarrow \Delta}$

(iv) $\dfrac{\Gamma,\ \varphi \Rightarrow \Delta, \quad \Gamma,\ \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$

Aufgabe 4 6 Punkte

Zwei Formeln heißen *erfüllbarkeitsäquivalent*, wenn entweder beide erfüllbar oder beide unerfüllbar sind. (Erfüllbarkeitsäquivalente Formeln wie etwa X und $\neg X$ müssen natürlich nicht unbedingt äquivalent sein.)

Eine KNF-Formel ist in m-*KNF*, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionsklauseln mit je höchstens m Literalen ist, d.h. wenn sie die Form $\bigwedge_i (Y_{i1} \vee \cdots \vee Y_{ik_i})$ mit $k_i \leq m$ hat.

Zeigen Sie, dass man zu jeder KNF-Formel in Polynomialzeit eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in 3-KNF konstruieren kann.

Aufgabe 5 6+6* Punkte

Ein *Ultrafilter* ist eine Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{U}$;

(ii) für alle $A, B \subseteq \mathbb{N}$ gilt: $A \in \mathcal{U} \wedge A \subseteq B \rightarrow B \in \mathcal{U}$;

(iii) für alle $A, B \subseteq \mathbb{N}$ gilt: $A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U} \rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$;

(iv) für alle $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt: $A \in \mathcal{U} \vee \bar{A} \in \mathcal{U}$.

Intuitiv schließt ein Ultrafilter „kleine“ Teilmengen von $\mathbb{N}$ aus und behält nur die „großen“.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$, die Menge

$$X = \{A \subseteq \mathbb{N} \colon n \in A\}$$

ein Ultrafilter ist. Solche Ultrafilter heißen *Hauptfilter*.

(b) Beweisen Sie, dass jeder Ultrafilter, der eine endliche Menge enthält, ein Hauptfilter ist.

(c) Jeder Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ ordnen wir eine Aussagenvariable X_A zu. Jede Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiert dann eine Interpretation $\mathfrak{I}_{\mathcal{F}}$ durch

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{F}}(X_A) = 1 \qquad \text{gdw.} \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Konstruieren Sie über diesen Variablen eine (unendliche) Menge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$, die genau dann durch eine Interpretation $\mathfrak{I}$ erfüllt ist, wenn $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathcal{F}}$ für einen Ultrafilter $\mathcal{F}$.

(d)* Erweitern Sie die Formelmenge Φ zu einer Menge Ψ über den gleichen Variablen, so dass Ψ genau dann durch eine Interpretation $\mathfrak{I}$ erfüllt ist, wenn $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathcal{F}}$ für einen Ultrafilter $\mathcal{F}$, der kein Hauptfilter ist.

(e)* Benutzen Sie den Kompaktheitssatz um nachzuweisen, dass die Menge $\Psi_{\mathcal{F}}$ erfüllbar ist, d.h, dass es Ultrafilter gibt, die nicht Hauptfilter sind, also nur aus unendlichen Mengen bestehen.

Die mit * versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben, für deren Lösung es Zusatzpunkte gibt.