

### Aufgabe 1

Eine *vollständige Erweiterung*  $T' \subseteq \text{FO}(\tau)$  einer Theorie  $T \subseteq \text{FO}(\tau)$  ist eine vollständige Theorie, die  $T$  enthält, das heißt,  $T'$  ist vollständig und  $T \subseteq T'$ .

Ein *Axiomensystem* einer Theorie  $T \subseteq \text{FO}(\tau)$  ist eine Satzmenge  $\Phi \subseteq \text{FO}(\tau)$  mit  $\text{Mod}(\Phi) = \text{Mod}(T)$ .

(a) Betrachten Sie die Theorie  $T$  der ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit *höchstens* 2 Knoten, also  $|V| \leq 2$ .

(i) Geben Sie ein Axiomensystem  $\Phi$  für  $T$  an.

(ii) Sind die folgenden Sätze in  $T$ ?

- $\forall x(x = x)$
- $\exists x(x \neq x)$
- $\exists x \exists y Exy$
- $\neg \exists x \exists y Exy$
- $\exists x \exists y (\neg Exy)$

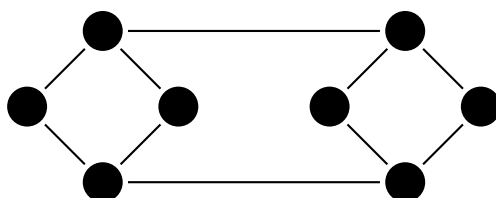
(iii) Geben Sie alle vollständigen Erweiterungen von  $T$  an. Bestimmen Sie auch für jede vollständige Erweiterung ein *endliches* Axiomensystem.

(b) Gibt es eine endliche Theorie  $T \subseteq \text{FO}(\tau)$ ?

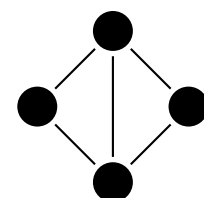
### Aufgabe 2

Geben Sie für die folgenden Paare von Strukturen jeweils einen trennenden Satz mit minimalem Quantorenrang  $m$  sowie eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin im Spiel  $\mathcal{G}_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  an. Geben Sie außerdem eine Gewinnstrategie für den Herausforderer im Spiel  $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  an.

(a)  $\mathfrak{A}$ :



$\mathfrak{B}$ :



(b)  $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}_{\geq 0}, M^{\mathfrak{A}})$  und  $\mathfrak{B} = (\mathbb{Q}_{\geq 0}, M^{\mathfrak{B}})$ , wobei  $M^{\mathfrak{A}}$  und  $M^{\mathfrak{B}}$  jeweils der Graph der Multiplikation in der entsprechenden Struktur ist, also ist zum Beispiel  $M^{\mathfrak{A}} = \{(a, b, a \cdot b) \mid a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ .