Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

Sommersemester 2023

10. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 27. Juni um 18:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung) — 10 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 10" zu absolvieren.

Aufgabe 2 — 9 Punkte

Sei $\tau := \{c, f, R\}$, wobei c ein Konstantensymbol, f ein einstelliges Funktionssymbol und R ein einstelliges Relationssymbol ist. Wir betrachten die folgende Menge T von atomaren Sätzen:

$$T := \{c = f^{100}c\} \cup \{Rf^{3n}c \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Für $m \in \mathbb{N}_{>0}$ steht $f^m c$ jeweils für den Term $\underbrace{f \dots f}_{m\text{-mal}} c$, und $f^0 c$ steht für den Term c.

(a) Geben Sie die kleinste Menge Σ an, die unter Substitution abgeschlossen ist und T enthält. Begründen Sie dabei insbesondere, warum die von Ihnen angegebene Menge minimal ist. Sie müssen den Abschluss unter Substitution *nicht* formal beweisen.

(b) Sei $\sim$ die durch Σ induzierte Kongruenzrelation auf der Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$. Zu welcher „bekannten" Struktur $\mathfrak{B}$ ist das kanonische Modell $\mathfrak{A}(\Sigma) := (\mathfrak{H}(\Sigma)/\sim)$ isomorph? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Hinweis: Vergessen Sie nicht die Relation $R^{\mathfrak{B}}$. Die Relation kann separat angegeben werden.

(c) Gilt $\mathfrak{H}(\Sigma) \cong \mathfrak{A}(\Sigma)$? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

(d) Per Definition gilt $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \Sigma$, und damit auch $\mathfrak{A}(\Sigma) \models T$. Gilt auch $\mathfrak{A}(\Sigma) \models T \cup \{\forall x Rx\}$? Gilt $\mathfrak{A}(\Sigma) \models T \cup \{\exists x \neg Rx\}$? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

Aufgabe 3 — 5 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die angegebene Relation $\sim$ auf der gegebenen Struktur $\mathfrak{A}$ eine Kongruenzrelation ist. Falls $\sim$ auf $\mathfrak{A}$ eine Kongruenzrelation ist, geben Sie zusätzlich ohne Beweis eine „bekannte" Struktur $\mathfrak{B}$ an, die isomorph zur Faktorstruktur $\mathfrak{A}/\sim$ ist.

(a) Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ und es gelte für alle $r, s \in \mathbb{R}$: $r \sim s$ genau dann, wenn $|r| = |s|$.

(b) Sei $\mathfrak{A} = (\{0,1,2\}^*, \circ)$ und es gelte für alle $u, v \in \{0,1,2\}^*$: $u \sim v$ genau dann, wenn $|u| = |v|$.

Dabei ist $\{0,1,2\}^*$ die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet $\{0,1,2\}$, $\circ$ ist die Konkatenation, also $u \circ v = uv$, und $|w|$ bezeichnet für $w \in \{0,1,2\}^*$ jeweils die Länge des Wortes w.

(c) Sei $\mathfrak{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$ und es gelte für alle $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$: $A \sim B$ genau dann, wenn $|A| = |B|$.

Dabei ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$, also die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, und $|M|$ bezeichnet für endliche $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Anzahl der Elemente in M, oder $|M| := \infty$ für unendliche M.

Aufgabe 4 6 Punkte

Zeigen Sie jeweils, dass die angegebene Relation $\sim$ auf der Struktur $\mathfrak{A}$ *immer* eine Äquivalenzrelation ist, oder finden Sie ein Gegenbeispiel $\mathfrak{A}$ und zeigen Sie, dass $\sim$ dort *keine* Äquivalenzrelation ist.

Falls $\sim$ auf $\mathfrak{A}$ immer eine Äquivalenzrelation ist, beweisen Sie zusätzlich, dass $\sim$ sogar stets eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$ ist, oder finden Sie ein Gegenbeispiel $\mathfrak{A}$ und zeigen Sie, dass $\sim$ dort *keine* Kongruenzrelation ist.

(a) Sei $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ eine beliebige τ-Struktur und es gelte für alle $a, b \in A$: $a \sim b$ genau dann, wenn es einen Automorphismus $\pi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ gibt mit $\pi(a) = b$.

(b) Sei $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ eine beliebige partielle Ordnung und es gelte für alle $a, b \in A$: $a \sim b$ genau dann, wenn weder $a <^{\mathfrak{A}} b$ noch $b <^{\mathfrak{A}} a$ gilt, das bedeutet, a und b sind entweder unter der Ordnung $<^{\mathfrak{A}}$ unvergleichbar oder es gilt $a = b$.

Aufgabe 5$^{\bullet}$ keine Punkte

Im Beweis des Vollständigkeitssatzes werden im Abschnitt über Hintikka-Mengen nur Mengen von reduzierten Sätzen betrachtet, also Sätze, die aus den Atomen nur mittels $\vee$, $\neg$ und $\exists$ aufgebaut sind. Welche Abschlusseigenschaft muss ein Paar von Satzmengen Γ^*, Δ^* zusätzlich zu den Eigenschaften (1)–(5) aus Lemma 4.16 erfüllen, um zu garantieren, dass $\Gamma^* \cup \neg\Delta^*$ ein Modell besitzt, wenn zusätzlich die Verwendung von Allquantoren $\forall$ erlaubt wird?

Fügen Sie in Lemma 4.16 eine entsprechende Eigenschaft ein und erweitern Sie den Beweis des Lemmas für diese Eigenschaft. Sie müssen auch zur induktiven Konstruktion der Folgen $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots$ und $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \dots$ auf Seite 108 und 109 im Skript zu den Fällen (a)–(e) noch einen weiteren Fall für den Allquantor hinzufügen.