Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

Sommersemester 2023

6. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 23. Mai um 18:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung) 15 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 6" zu absolvieren.

Aufgabe 2 4 Punkte

Im Folgenden sei h ein einstelliges Funktionssymbol, $\cdot$ ein zweistelliges Funktionssymbol, P und Q jeweils einstellige Relationssymbole und R ein dreistelliges Relationssymbol.

(a) Nutzen Sie für die folgenden Aufgaben die Verfahren aus der Vorlesung. Geben Sie dabei genug Zwischenschritte an, damit Ihre Umformung nachvollziehbar ist.

(i) Überführen Sie die folgende Formel in Negationsnormalform.

$$\varphi_i := \neg\forall x(Px \to Qx) \land \neg(hy \neq y \lor \exists x \forall z(\neg Rxyz)) \quad \in \mathrm{FO}(\{h, P, Q, R\})$$

(ii) Überführen Sie φ_i weiter in Pränex-Normalform, ausgehend von Ihrem Ergebnis aus (a).

(iii) Überführen Sie die folgende Formel in eine Formel ψ in Skolem-Normalform.

$$\varphi_{iii} := \exists x \forall y \exists z (y \cdot z = x) \quad \in \mathrm{FO}(\{\cdot\})$$

(b) Geben Sie ein Modell $\mathfrak{A}$ von φ_{iii} an, das zu Ihrer Formel ψ in Skolem-Normalform passend ist, aber sie *nicht* erfüllt, d.h. $\mathfrak{A} \not\models \psi$. Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Aufgabe 3 4 Punkte

Für eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ und zwei Formeln $\psi, \vartheta \in \mathrm{FO}$ sagen wir, dass ϑ *unter* Φ *aus* ψ *folgt*, kurz $\psi \models_\Phi \vartheta$, wenn für jedes Modell $(\mathfrak{A}, \beta)$ von Φ, das zu ψ und ϑ passend ist, gilt:

$$\text{Wenn } (\mathfrak{A}, \beta) \models \psi, \text{ dann } (\mathfrak{A}, \beta) \models \vartheta.$$

Außerdem definieren wir die *Äquivalenz unter* Φ durch $\psi \equiv_\Phi \vartheta$ genau dann, wenn $\psi \models_\Phi \vartheta$ und $\vartheta \models_\Phi \psi$. Im Folgenden seien $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ und $\psi, \vartheta \in \mathrm{FO}$ beliebig. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es gilt $\psi \models_\Phi \vartheta$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\psi\} \models \vartheta$ gilt.

(b) Wenn $\psi \not\equiv \vartheta$, dann $\psi \not\equiv_\Phi \vartheta$.

Aufgabe 4 12 Punkte

Seien o, s und t Konstantensymbole, f ein einstelliges Funktionssymbol sowie E und $<$ jeweils zweistellige Relationssymbole.

Betrachten Sie die folgenden Klassen von Strukturen und geben Sie jeweils zunächst eine Struktur in der Klasse an, die *möglichst wenige Elemente* enthält und dann ein *wenn möglich endliches* Axiomensystem.

Erklären Sie kurz die Idee Ihrer Formeln. Sie brauchen *nicht* zu beweisen, dass Ihre angegebenen Strukturen tatsächlich möglichst wenige Elemente enthalten, und falls Ihr Axiomensystem unendlich ist, brauchen Sie auch *nicht* beweisen, dass es kein endliches Axiomensystem gibt.

(a) $\mathcal{K}_a := \{(A, <) \mid\ <$ ist eine partielle Ordnung auf A, die *nicht* linear ist$\}$

(b) $\mathcal{K}_b := \{(A, <) \mid <$ ist eine lineare Ordnung auf A,
in der jedes nicht-maximale Element einen direkten Nachfolger hat,
aber *nicht* alle nicht-minimalen Elemente direkte Vorgänger haben$\}$

Begriffserklärung: Ein *direkter Nachfolger* eines Elements a in einer Ordnung $<$ ist ein Element b, das bzgl. der Ordnung größer ist als a, und sodass kein anderes Element bzgl. der Ordnung zwischen a und b liegt. Die Definition eines *direkten Vorgängers* ist analog.

(c) $\mathcal{K}_c := \{(U, f, o) \mid f(U)$ ist unendlich, aber $o \notin f(U)\}$

Begriffserklärung: $f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}$ ist das *Bild* des Universums U unter f.

(d) $\mathcal{K}_d := \{(V, E, s, t) \mid \mathcal{G} = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph mit $d(s, t) = n\}$

Dabei ist $n \in \mathbb{N}$ eine feste natürliche Zahl, $\mathbb{N}$ enthält auch 0.

Begriffserklärung: In einem gerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ bezeichnet $d(v, w)$ für $v, w \in V$ die *gerichtete Distanz* von v nach w, also die Länge eines kürzesten gerichteten Pfades von v nach w. Die Länge eines Pfades wird anhand der Kanten gemessen. Beispielsweise ist die Distanz eines Knotens v zu sich selbst immer $d(v, v) = 0$, da der „triviale Pfad" (v) von v zu sich selbst keine Kante hat, die Distanz von einem Knoten v aus zu seinen direkten Nachfolgern $w \neq v$ ist immer 1 und falls w von v nicht erreichbar ist, setzen wir $d(v, w) := \infty$, also ist die Distanz dann insbesondere keine natürliche Zahl. Da die Distanz gerichtet ist, kann $d(v, w) \neq d(w, v)$ sein.

Aufgabe 5$^\bullet$ keine Punkte

Betrachten Sie die Struktur $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, +, 0)$ und die Formel $\varphi(x) = \exists y(x + y = 0)$.

(a) Für welche $z \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathfrak{A} \models \varphi(z)$?

(b) Wählen Sie ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(z)$ und finden Sie eine *unendliche* Substruktur $\mathfrak{B} = (B, +, 0)$ von $\mathfrak{A}$, sodass $z \in B$, aber $\mathfrak{B} \not\models \varphi(z)$.

(c) Formen Sie $\varphi(x)$ zu einer Formel $\vartheta(x)$ in Skolem-Normalform um. Ist φ logisch äquivalent zu ϑ?

(d) Geben Sie eine Expansion $\mathfrak{C} = (\mathbb{Z}, \tau)$ von $\mathfrak{A}$ an, sodass für alle $z \in \mathbb{Z}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(z)$ auch $\mathfrak{C} \models \vartheta(z)$ gilt. Was passiert, wenn Sie y durch ein Konstantensymbol ersetzen?

(e) Gibt es eine Substruktur $\mathfrak{B} = (B, \tau)$ von $\mathfrak{C}$, sodass $\mathfrak{C} \models \varphi(z)$ und $z \in B$, aber $\mathfrak{B} \not\models \varphi(z)$? Begründen Sie Ihre Antwort.