Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

Sommersemester 2023

5. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 16. Mai um 18:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung) — 15 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 5“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 — 5 Punkte

Wir definieren auf der Menge der ganzen Zahlen die Vorgängerfunktion $p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und die Nachfolgerfunktion $s\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} p(z) &= z - 1 \quad \text{und} \\ s(z) &= z + 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Geben Sie für jede der folgenden Strukturen jeweils alle möglichen Substrukturen an und begründen Sie jeweils kurz, warum es keine weiteren Substrukturen gibt.

(a) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, p, s)$

(b) $\mathfrak{B} := (\mathbb{Z}, s)$

(c) $\mathfrak{C} := (\mathbb{Z})$

Aufgabe 3 — $5 + 2 = 7$ Punkte

Ein *ungerichteter Graph mit Markierungen* ist eine Struktur $\mathcal{G} = (V, E^{\mathcal{G}}, M^{\mathcal{G}})$, wobei $E^{\mathcal{G}} \subseteq V \times V$ wie in der Vorlesung definiert eine symmetrische Kantenrelation ohne Schlingen ist und $M^{\mathcal{G}} \subseteq V$ eine Menge von markierten Knoten ist. Wenn $v \in M^{\mathcal{G}}$, dann sagen wir, dass v *markiert* ist, ansonsten ist $v \notin M^{\mathcal{G}}$ und wir nennen v *unmarkiert.*

(a) Beschreiben Sie jeweils in Worten, welche Eigenschaften die folgenden FO-Sätze auf ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V, E^{\mathcal{G}}, M^{\mathcal{G}})$ mit Markierungen ausdrücken. Geben Sie dabei *nicht* den FO-Satz „wörtlich“ wieder, sondern nutzen Sie möglichst geschickte Formulierungen und Begriffe der Graphentheorie, wie zum Beispiel „markierter Knoten“, „Kante“, „Nachbar“, „verbunden“, ...

Beispiel: Die Formel $\exists x \exists y Exy$ drückt aus, dass $\mathcal{G}$ mindestens eine Kante enthält.

(i) $\psi_i := \neg\exists x(\neg Mx)$

(ii) $\psi_{ii} := \exists x \exists y(Exy \wedge Mx \wedge My)$

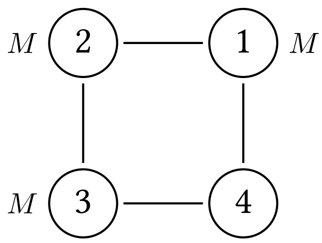
(iii) $\psi_{iii} := \exists x \exists y \exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge Mx \wedge My \wedge Mz)$

(iv) $\psi_{iv} := \forall x \forall y((Mx \wedge My) \to Exy)$

(v) $\psi_v := \exists x(\neg Mx \wedge \forall y(Exy \rightarrow My))$

(b) Geben Sie für folgenden Graphen $\mathcal{G} = (V, E^{\mathcal{G}}, M^{\mathcal{G}})$ mit kurzer Begründung an, welche der Formeln aus (a) durch $\mathcal{G}$ erfüllt werden. Die markierten Knoten sind mit einem M gekennzeichnet.

$\mathcal{G}$:



Aufgabe 4 8 Punkte

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{A} := (\mathbb{R}_{\geq 0}, +, f^{\mathfrak{A}})$, wobei $+$ die übliche Addition ist und $f^{\mathfrak{A}} \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert ist durch $f^{\mathfrak{A}}(r) := \lfloor r \rfloor$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f^{\mathfrak{A}}$ rundet also auf die nächste ganze Zahl ab, es gilt zum Beispiel $f^{\mathfrak{A}}(2{,}9) = \lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$.

Geben Sie jeweils $\mathrm{FO}(\{+, f\})$-Formeln an, die die folgenden Sachverhalte in der Struktur $\mathfrak{A}$ beschreiben. Achten Sie dabei auf die freien Variablen und erklären Sie jeweils kurz die Idee Ihrer Formeln.

Hinweis: Sie dürfen Hilfsformeln definieren und Formeln aus *vorherigen* Teilaufgaben verwenden, auch wenn Sie die entsprechende Teilaufgabe nicht bearbeitet haben.

(a) $a = 0$

(b) $a < b$

(c) a ist *keine* natürliche Zahl, also $a \notin \mathbb{N}$ (die 0 zählen wir zu den natürlichen Zahlen)

(d) $a = 1$

(e) $c = \max\{a - b, 0\}$

Aufgabe 5• keine Punkte

Seien $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ und $\mathfrak{B} = (B, \tau)$ zwei τ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

(a) Zeigen Sie per Induktion über den Termaufbau, dass für jeden Term t und jede Variablenbelegung $\beta \colon \mathsf{var}(t) \rightarrow A$ folgendes gilt.

$$[\![t]\!]^{\mathfrak{A},\beta} = [\![t]\!]^{\mathfrak{B},\beta}$$

(b) Zeigen Sie mithilfe von (a) per Induktion über den Formelaufbau, dass für jede quantorenfreie Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{FO}(\tau)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ folgendes gilt.

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

(c) Ein Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ heißt *universell*, wenn ψ die Gestalt $\psi = \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ hat, wobei φ eine quantorenfreie Formel ist. Nutzen Sie (b), um zu zeigen, dass universelle Sätze unter Substrukturen abgeschlossen sind, das heißt, wenn $\mathfrak{B} \models \psi$, dann auch $\mathfrak{A} \models \psi$ für alle $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Geben Sie weiter ein Gegenbeispiel an, das zeigt, dass dieser Zusammenhang nicht immer gilt, wenn ψ *nicht* universell ist.