

3. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 2. Mai um 18:00 Uhr online im [Moodle-Lernraum](#).

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung)

15 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im [Moodle-Lernraum](#) der Veranstaltung unter „eTest 3“ zu absolvieren.

Aufgabe 2

5 + 4 = 9 Punkte

- (a) Zeigen oder widerlegen Sie mithilfe des Resolutionskalküls aus der Vorlesung, dass die folgende Formelmenge erfüllbar ist.

$$\Phi := \{B \vee E, \neg A \wedge C \wedge D, \neg(B \wedge E), E \rightarrow (A \vee B), (B \wedge C \wedge D) \rightarrow E\}$$

- (b) Die *bereinigte* Resolution ist eine Variante der Resolution aus der Vorlesung mit den folgenden zusätzlichen Einschränkungen.

- Sie dürfen keine *tautologischen* Resolventen bilden, d.h. Sie dürfen keine Klauseln C bilden, in denen ein Literal X sowohl negiert als auch nicht negiert vorkommt, also $\{X, \bar{X}\} \subseteq C$.
- Sie dürfen keine *Obermengen* von bereits vorhandenen oder vorher gebildeten Klauseln bilden, d.h. wenn zum Beispiel $K = \{\{X\}, \{X, Y\}, \{\neg Y, Z\}\}$, dann dürfen Sie *nicht* die Resolvente $\{X, Z\}$ bilden, da das eine Obermenge der schon vorhandenen, kürzeren Klausel $\{X\}$ ist.

Es ist klar, dass die bereinigte Resolution immer noch korrekt ist, Sie dürfen ohne Beweis davon ausgehen, dass sie auch vollständig ist. Zeigen oder widerlegen Sie mithilfe der bereinigten Resolution, dass die folgende Klauselmengemenge erfüllbar ist.

$$K := \{\{P\}, \{\neg S\}, \{\neg T, R\}, \{\neg R, \neg Q\}, \{T\}, \{P, T, S, Q\}, \{\neg P, \neg R, T\}\}$$

Bitte machen Sie in Ihrer Resolution deutlich, in welcher Reihenfolge die Resolventen gebildet wurden, zum Beispiel indem Sie die zuerst gebildeten Resolventen in Ihrer Grafik höher setzen als die später gebildeten Resolventen.

Aufgabe 3

5 Punkte

Sei $\Phi_0 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq \dots$ eine unendliche, aufsteigende Kette von aussagenlogischen Formelmengen, also $\Phi_n \subseteq \text{AL}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$ genau dann erfüllbar ist, wenn jede der Mengen Φ_n für $n \in \mathbb{N}$ erfüllbar ist.

Aufgabe 4

6 Punkte

Sei $C = (V_C, E_C)$ ein fester, endlicher, ungerichteter Graph. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt C -färbbar, wenn es eine C -Färbung $c: V \rightarrow V_C$ von G gibt, sodass für alle Kanten $\{v, w\} \in E$ gilt, dass $\{c(v), c(w)\} \in E_C$.

- (a) Geben Sie ohne Beweis einen ungerichteten Graphen C mit möglichst wenigen Knoten an, sodass für alle ungerichteten Graphen G gilt:

G ist C -färbbar genau dann, wenn G 3-färbbar ist.

- (b) Nutzen Sie den Kompaktheitssatz, um zu zeigen, dass für alle ungerichteten Graphen G gilt: Wenn jeder endliche Teilgraph von G C -färbbar ist, dann ist G bereits C -färbbar.

Hinweis: Nutzen Sie die Variablenmenge $\tau = \{F_{v,a} \mid v \in V, a \in V_C\}$ für C -Färbungen von $G = (V, E)$ und präzisieren Sie zunächst kurz die intendierte Semantik.

Erklärung der Begriffe: Ungerichtete Graphen dürfen keine Selbstkanten haben, die Kanten von ungerichteten Graphen lassen sich also als Mengen $e = \{v, w\}$ mit *genau* zwei Elementen darstellen. Ein *Teilgraph* von $G = (V, E)$ ist ein Graph $H = (W, F)$ mit $W \subseteq V$ und $F \subseteq E$.

Aufgabe 5

keine Punkte

Wir definieren die *Doppelresolution* analog zum Resolutionsverfahren aus der Vorlesung, jedoch mit einem neuen Resolventenbegriff: Seien C, C_1, C_2 Klauseln. C heißt *Doppelresolvente* von C_1 und C_2 , falls es Literale Y, Z gibt, sodass $\{Y, Z\} \subseteq C_1$, $\{\bar{Y}, \bar{Z}\} \subseteq C_2$ und

$$C = (C_1 \setminus \{Y, Z\}) \cup (C_2 \setminus \{\bar{Y}, \bar{Z}\}).$$

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen.

- (a) Der Doppelresolutionskalkül ist korrekt.
(b) Der Doppelresolutionskalkül ist vollständig.