Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

Sommersemester 2023

1. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 18. April um 18:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Organisatorische Hinweise: Der Übungsbetrieb läuft online über Moodle.

- **Gruppenanmeldung**: Melden Sie sich hier in eine Abgabegruppe von 3–4 Personen an.
- **Regeln**: Bitte lesen und beachten Sie die Regeln für den Übungsbetrieb.
- **Korrektur und Lösungen**: Die Lösungen der regulären Übungsblätter werden Ihnen als Videos über Moodle zur Verfügung gestellt. Sie erhalten Korrekturen ebenfalls über Moodle. Bitte beachten Sie, dass es dafür keinen festen Termin gibt, Lösungen und Korrekturen werden nach Ihrer Abgabe hochgeladen, sobald sie fertiggestellt wurden.

  Achtung: Bitte melden Sie sich **maximal zwei Wochen** nach Erhalt Ihrer Korrekturen, falls Ihnen Fehler auffallen. Danach werden die Punkte **nicht** mehr geändert.

- Im regulären Übungsbetrieb wird es einige freiwillige Aufgaben geben. Diese Aufgaben werden mit ● markiert. Sie werden *nicht* korrigiert und zählen nicht für die Zulassung. Trotzdem empfehlen wir Ihnen **dringend**, diese Aufgaben zu bearbeiten, da alle Inhalte wichtig für die Klausur sind. In den Lösungsvideos wird es auch Lösungen zu den freiwilligen Aufgaben geben.

Aufgabe 1 (eTest-Erinnerung) — 20 eTest-Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 1“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $1 + 6 + 3 = 10$ Punkte

Emma, Gérard, Jules und Romane planen einen Urlaub in Frankreich. Ihre möglichen Urlaubsziele sind Marseille, Nizza, Ajaccio, Toulouse, Bordeaux, Lyon, Orléans, Calais und Saint-Malo. Sie müssen folgende Bedingungen beachten.

(1) Jules und Romane bevorzugen Marseille gegenüber Nizza, deswegen möchten sie, falls sie Nizza besuchen, auch Marseille besuchen.

(2) Zwischen Orléans und Lyon besteht eine günstige Verbindung, deshalb einigen sich alle, entweder beide Orte zu besuchen oder keinen von beiden.

(3) Emma möchte gerne schwimmen. Da der Urlaub im Sommer geplant ist, möchte sie mindestens zwei Orte an der Mittelmeerküste besuchen.

(4) Gérard möchte hingegen mehr Abwechslung und besteht darauf, höchstens zwei Orte an der Mittelmeerküste zu besuchen.

(5) Jules möchte mindestens einen Ort besuchen, der *nicht* direkt an einer Küste liegt.

(6) Romane möchte entweder die Ärmelkanalküste oder Korsika besuchen, aber aufgrund der großen Entfernung nicht beides.

(7) Gérard war vor kurzem auf einer Tour entlang der Garonne und möchte daher *keinen* der Orte an der Garonne erneut besuchen.

(8) Emma ist an Geschichte interessiert und möchte daher Napoleons Geburtsort besuchen.

Finden Sie durch geeignete Formalisierung in der Aussagenlogik heraus, welche Urlaubsziele die vier gemeinsam besuchen, wenn sie sich an alle Bedingungen halten müssen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Definieren Sie eine geeignete Variablenmenge und deren intendierte Semantik. Unterscheiden Sie durch Ihre Notation explizit zwischen Syntax und Semantik.

(b) Formalisieren Sie die Bedingungen (1) bis (8) in der Aussagenlogik, indem Sie für jede Bedingung eine aussagenlogische Formel angeben.

(c) Bestimmen Sie aus den Aussagen, welche Urlaubsziele besucht werden. Gibt es mehrere Möglichkeiten? Argumentieren Sie semantisch mithilfe von Interpretationen (insbesondere nicht über Wahrheitstabellen oder Äquivalenzumformungen).

Hinweis: Nutzen Sie die Karte und die Annahmen auf der letzten Seite des Übungsblatts als Visualisierung und um sicherzustellen, dass es keine Missverständnisse bezüglich der Fakten gibt.

Aufgabe 3 $(2+2)+1=5$ Punkte

Wir definieren den Junktor „$\not\to$“ durch $[\![\varphi \not\to \psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ genau dann, wenn $[\![\varphi \to \psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 0$.

(a) Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar? Welche sind Tautologien? Beweisen Sie Ihre Behauptungen semantisch mittels Interpretationen (ohne Wahrheitstabellen und Äquivalenzumformungen).

(i) $\varphi_i \coloneqq (X \to Y) \land (X \to \neg Y)$

(ii) $\varphi_{ii} \coloneqq (X \not\to Y) \land (X \not\to \neg Y)$

(b) Zeigen Sie nur durch Äquivalenzumformungen, dass folgende Formeln logisch äquivalent sind.

$$A \to (B \land C) \quad \text{und} \quad (A \to B) \land (A \to C)$$

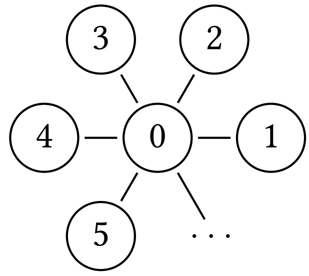
Hinweis: Sie dürfen auch die Äquivalenz $\psi \to \varphi \equiv \neg\psi \lor \varphi$ für $\psi, \varphi \in \mathrm{AL}$ verwenden.

Aufgabe 4 $2+3=5$ Punkte

Wir ordnen einem ungerichteten Graphen $G=(V,E)$ mit der Knotenmenge $V=\{0,\dots,n-1\}$ die Interpretation $\mathfrak{I}_G$ über der Variablenmenge $\tau_n \coloneqq \{X_{ij} \mid 0 \le i < j < n\}$ zu, sodass $\mathfrak{I}_G(X_{ij}) = 1$ genau dann, wenn in G eine ungerichtete Kante zwischen i und j existiert, d.h. $\{i,j\} \in E$.

(a) Geben Sie zwei verschiedene ungerichtete Graphen G mit genau drei Knoten $V=\{0,1,2\}$ an, sodass jeweils $\mathfrak{I}_G \models X_{01} \land X_{12}$ gilt.

(b) Konstruieren Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ eine Formel φ_n, die auf ungerichteten Graphen mit n Knoten $\{0,\dots,n-1\}$ ausdrückt, dass der Graph ein Stern mit Zentrum 0 ist, also die folgende Form hat.



Bemerkung: Präzise ausgedrückt bedeutet das, dass der Knoten 0 mit allen anderen Knoten direkt benachbart sein soll und keine anderen Kanten im Graphen existieren dürfen.

Aufgabe 5● keine Punkte

Eine Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ heißt *nicht-trivial*, wenn sowohl φ als auch $\neg\varphi$ erfüllbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ genau dann unerfüllbar ist, wenn $\neg\varphi$ eine Tautologie ist.

Bemerkung: Die Aussage ist äquivalent zu Lemma 1.6 im Skript.

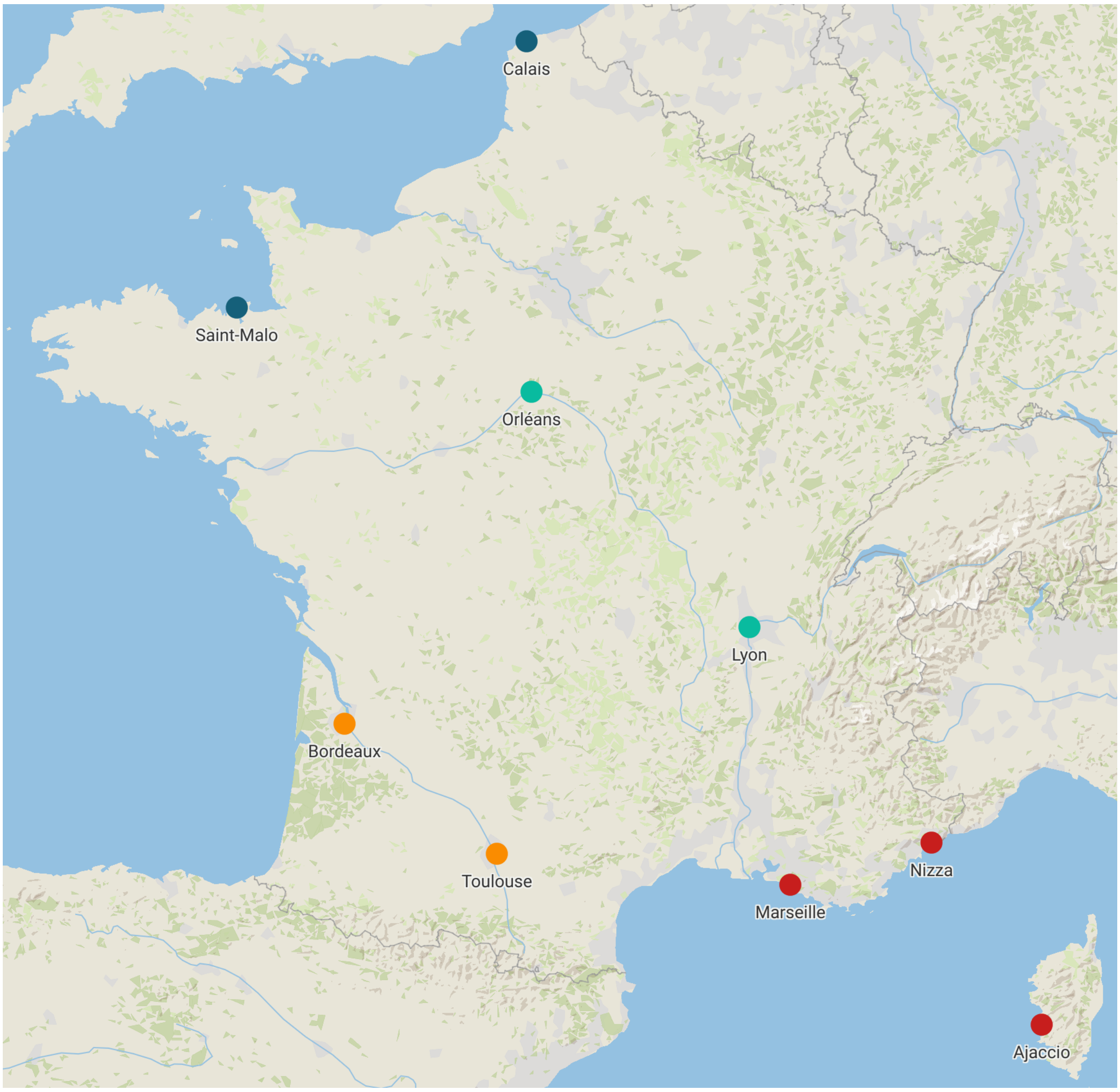
(b) Folgern Sie, dass für $\varphi \in \mathrm{AL}$ gilt:

φ ist genau dann nicht-trivial, wenn weder φ noch $\neg\varphi$ eine Tautologie ist.

(c) Zeigen Sie, dass jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ entweder eine Tautologie, nicht-trivial oder unerfüllbar ist, aber nicht mehrere der drei Fälle zugleich eintreten können.

(d) Zeigen Sie per Induktion über den Formelaufbau: Jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$, die keine Negation ($\neg$), keine Implikation ($\rightarrow$) und keine der Konstanten 0 und 1 enthält, ist nicht-trivial.

Karte



Annahmen

- Marseille, Nizza und Ajaccio liegen an der Mittelmeerküste.
- Toulouse, Bordeaux, Lyon und Orléans liegen *nicht* direkt an einer Küste.
- Saint-Malo und Calais liegen an der Ärmelkanalküste.
- Ajaccio liegt auf der Insel Korsika.
- Bordeaux und Toulouse liegen an der Garonne.
- Napoleon wurde in Ajaccio geboren.