Aufgabe 1

Eine *vollständige Erweiterung* $T' \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ einer Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ist eine vollständige Theorie, die T enthält, das heißt, T' ist vollständig und $T \subseteq T'$. Ein *Axiomensystem* einer Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ist eine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ mit $\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(T)$.

(a) Betrachten Sie die Theorie T der ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit *höchstens* 2 Knoten, also $|V| \leq 2$.

  (i) Geben Sie ein Axiomensystem Φ für T an.

  (ii) Sind die folgenden Sätze in T?

  - $\forall x(x = x)$
  - $\exists x(x \neq x)$
  - $\exists x \exists y(Exy)$
  - $\neg\exists x \exists y(Exy)$
  - $\exists x \exists y(\neg Exy)$

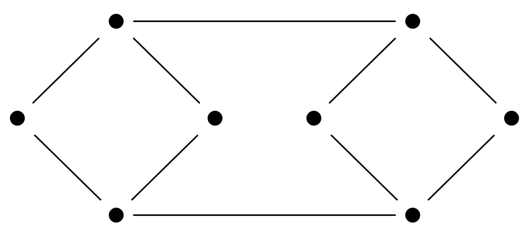
  (iii) Geben Sie alle vollständigen Erweiterungen von T an. Bestimmen Sie auch für jede vollständige Erweiterung ein *endliches* Axiomensystem.

(b) Gibt es eine endliche Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$?

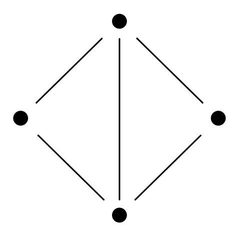
Aufgabe 2

Geben Sie für die folgenden Paare von Strukturen jeweils eine trennende FO-Formel mit minimalem Quantorenrang m sowie eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin im Spiel $\mathcal{G}_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an. Geben Sie außerdem eine Gewinnstrategie für den Herausforderer im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an.

(a) $\mathfrak{A}$:



$\mathfrak{B}$:



(b) $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}_{\geq 0}, M^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{Q}_{\geq 0}, M^{\mathfrak{B}})$, wobei $M^{\mathfrak{A}}$ und $M^{\mathfrak{B}}$ jeweils der Graph der Multiplikation in der entsprechenden Struktur ist. Also z.B. ist $M^{\mathfrak{A}} = \{(a, b, a \cdot b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.