

12. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 12. Juli um 16:00 Uhr online im [Moodle-Lernraum](#).

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1

8 Punkte

Diese Aufgabe ist online im [Moodle-Lernraum](#) der Veranstaltung unter „eTest 12“ zu absolvieren.

Aufgabe 2

12 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir nur Transitionssysteme der Form $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$, wobei E die (einzige) Kantenbeziehung ist und $P, Q \subseteq V$ die atomaren Eigenschaften sind. Ist $v \in V$, so nennen wir $w \in V$ einen P -Nachfolger (bzw. Q -Nachfolger) von v , wenn $(v, w) \in E$ und $w \in P$ (bzw. $w \in Q$).

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Transitionssystemen mit ausgewählten Knoten v in der Modallogik definierbar sind.

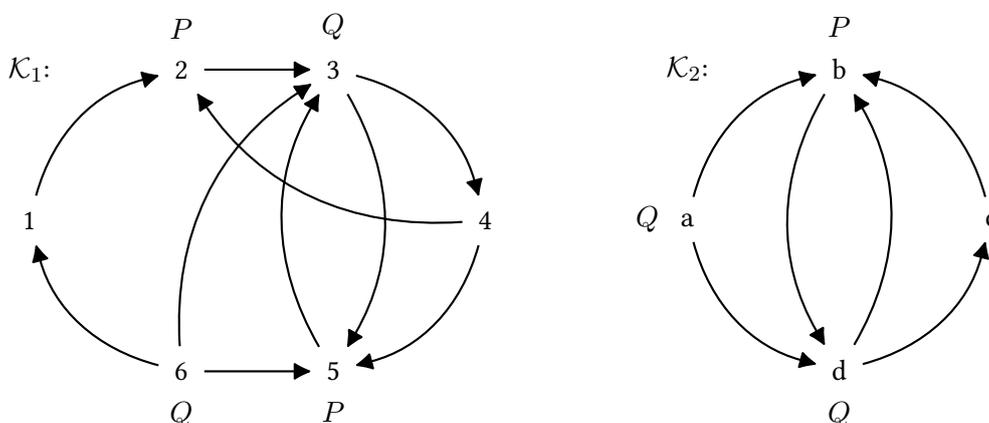
- (a) v hat mindestens zwei verschiedene Q -Nachfolger, die jeweils mind. einen P -Nachfolger haben.
- (b) Jeder P -Nachfolger von v besitzt keinen Q -Nachfolger.
- (c) Der Knoten v hat entweder keine Nachfolger oder es gibt einen Pfad von v zu sich selbst, der nur Knoten in P besucht.
- (d) Es gibt einen von v aus erreichbarer Knoten, der eine Selbstkante hat.
- (e) Von v geht kein Pfad der Länge 4, aber ein Pfad der Länge 3 aus.

Hinweis: Auf einem Pfad dürfen Wiederholungen von Knoten auftreten.

Aufgabe 3

5 Punkte

Geben Sie die maximale Bisimulation Z zwischen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 an. Begründen Sie für alle $(v, w) \notin Z$, dass diese nicht Teil der Bisimulation sind.



Aufgabe 4

4 Punkte

Seien \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 zwei Kripkestrukturen. Zeigen Sie, dass es eine bzgl. \subseteq maximale Bisimulation Z zwischen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 gibt, d.h. sodass für alle Bisimulationen Z' zwischen den beiden Strukturen gilt: $Z' \subseteq Z$.

Aufgabe 5

keine Punkte

Wir betrachten die ML-Formel

$$\psi := \neg Q \wedge \diamond \diamond \diamond \diamond Q \in \text{ML}.$$

- (a) Geben Sie ein Modell \mathcal{K}, v von ψ mit möglichst wenigen Zuständen an und begründen Sie, warum es kein Modell mit weniger Zuständen gibt.
- (b) Geben Sie nun ein Baummodell \mathcal{T}, v von ψ mit möglichst wenigen Zuständen an.
- (c) Geben Sie eine ML-Formel φ an, sodass $\diamond \varphi$ ein Baummodell \mathcal{T}, v mit minimaler Anzahl an Zuständen besitzt. Das bedeutet, es darf *überhaupt kein* Modell (ungeachtet ob Baum oder nicht) \mathcal{K}, w von $\diamond \varphi$ mit weniger Zuständen als \mathcal{T} geben.