Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

Sommersemester 2022

11. Übungsblatt Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 5. Juli um 16:00 Uhr online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig, sie werden nicht korrigiert und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 7 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 11" zu absolvieren.

Aufgabe 2 $3 + 2 + 3 = 8$ Punkte

(a) Beweisen Sie folgende Aussage: Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Satzmenge und $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ein Satz mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(\psi)$. Dann existiert eine endliche Teilmenge von Φ, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert.

(b) Sei

$$\mathcal{K} = \{(G, E) \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph, in dem jeder Knoten unendlich viele Nachbarn hat}\}.$$

Geben Sie ein Axiomensystem für die Klasse $\mathcal{K}$ an.

(c) Nutzen Sie (a) und (b), um zu zeigen, dass die Klasse $\mathcal{K}$ nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3 $2 + 2 + 2 + 3 = 9$ Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils (mit einer Methode Ihrer Wahl), dass folgende Klassen axiomatisierbar sind. Wenn eine Klasse axiomatisierbar ist, geben Sie ein – wenn möglich endliches – Axiomensystem an. Falls kein endliches existiert, beweisen Sie dies.

(a) Die Klasse $\{(A, P) \mid |P| \geq |\mathbb{R}|\}$.

(b) Die Klasse der zu $(\{a, b\}^*, \circ)$ isomorphen Strukturen (hierbei ist $\circ$ die Konkatenationsfunktion auf den $\{a, b\}$-Wörtern).

(c) Die Klasse der zu $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ isomorphen Strukturen.

(d) Die Klasse der Strukturen (A, g, h), wobei g und h einstellige Funktionssymbole seien, sodass die Menge $\mathrm{Bild}(g \circ h) = \{g(h(a)) \mid a \in A\}$ unendlich ist.

Aufgabe 4 5 Punkte

Zeigen Sie, dass die Klasse der ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$, die höchstens endlich viele Dreiecke enthalten, nicht FO-axiomatisierbar ist. Nutzen Sie für Ihren Beweis den Kompaktheitssatz und nicht die Ehrenfeucht-Fraïssé-Methode.

Hinweis: Ein Dreieck in einem ungerichteten Graphen $\mathcal{G}$ ist ein Tripel (v, w, x) von Knoten, sodass $(v, w), (w, x), (x, v) \in E^{\mathcal{G}}$.

Aufgabe 5$^\bullet$ keine Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol und $f^n(a) = \underbrace{f(f(f(...(a))))}_{n\text{-mal}}$.

Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass die Klasse

$$\{(A, f) \mid \text{ für alle } a \in A \text{ gibt es ein } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ mit } f^n(a) = a\}$$

nicht FO-axiomatisierbar ist.