Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

SS 2021

12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Montag, den 19.07., um 12:00 Uhr, online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Aufgabe 1 — 5 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 12" zu absolvieren.

Aufgabe 2 — 11 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir Transitionssysteme der Form $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$, wobei E die einzige Kantenrelation ist und $P, Q \subseteq V$ atomare Eigenschaften sind. Die Elemente des Universums V nennen wir Knoten oder auch *Zustände*.

Ist $(v, w) \in E$, dann nennen wir w einen *Nachfolger* von v und v einen *Vorgänger* von w. Falls zusätzlich $w \in P$ (bzw. $w \in Q$), dann nennen wir w einen P-Nachfolger (bzw. Q-Nachfolger) von v. Ist zusätzlich $v \in P$ (bzw. $v \in Q$), dann nennen wir v einen P-Vorgänger (bzw. Q-Vorgänger) von w.

Ein *Weg* ist eine (endliche oder unendliche) Folge von Knoten $(v_0, v_1, \dots)$, sodass von jedem Knoten zum nächsten eine *gerichtete* Kante existiert, das heißt, es gilt jeweils $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Auf einem Weg dürfen sich Knoten und Kanten *wiederholen*.

Wir sagen, dass w von v aus *erreichbar* ist, wenn es einen Weg von v aus gibt, der in w endet, also einen (endlichen) Weg der Form $(v = v_0, \dots, v_n = w)$. Dazu zählt auch der Fall $v = w$.

Ein *Kreis* ist ein Weg der Form $(v_0, v_1, \dots, v_n, v_0)$, wobei Anfangs- und Endknoten gleich sind, aber ansonsten alle Knoten paarweise verschieden sind, das heißt, $v_i \neq v_j$ für $0 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$.

Wege und Kreise sind in dieser Aufgabe *gerichtet*.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Transitionssystemen $\mathcal{K}$ mit ausgewähltem Knoten v durch eine modallogische Formel definierbar sind. Falls Sie eine Formel angeben, erklären Sie kurz die Idee Ihrer Formel.

(a) Es gibt mindestens einen P-Vorgänger von v, der keinen Q-Nachfolger hat.

(b) Es gibt mindestens einen Q-Nachfolger von v, der keinen P-Nachfolger hat.

(c) Es gibt 2 verschiedene Nachfolger von v, die jeweils durch Kanten miteinander verbunden sind.

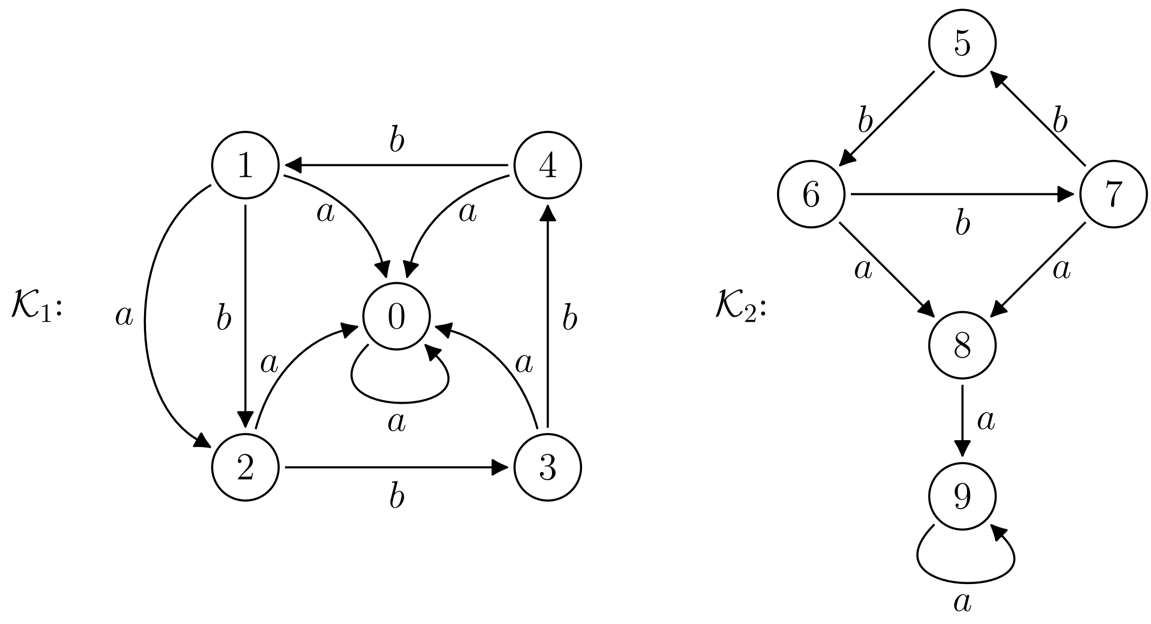
(d) Keiner der von v aus erreichbaren Zustände hat eine Selbstkante.

(e) Es gibt keinen unendlichen Weg von v aus und v hat 2 verschiedene Q-Vorgänger, die jeweils von allen Knoten in $\mathcal{K}$ aus erreichbar sind, die *nicht* auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 3 7 Punkte

Geben Sie die maximale Bisimulation Z zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ an. Geben Sie für alle $(v, w) \notin Z$ eine trennende ML-Formel ψ_{vw} mit minimaler Modaltiefe an.

Hinweis: Sie können die Booleschen Konstanten 0 und 1 in der Modallogik verwenden. Die trennenden Formeln können in einer Tabelle angegeben werden. Verwenden Sie die gleiche trennende Formel mehrfach, wenn möglich. Sie brauchen die Eigenschaften *nicht* zu beweisen. Eine kurze Erklärung hilft beim Nachvollziehen der Fehler und kann Teilpunkte sichern.



Aufgabe 4 $2 + 1 + 2$ Punkte

Wir betrachten die ML-Formel

$$\psi := \neg Q \wedge \Diamond\Diamond\Diamond\Diamond Q \quad \in \text{ML}.$$

(a) Geben Sie ein Modell $\mathcal{K}, v$ von ψ mit möglichst wenigen Zuständen an und begründen Sie, warum es kein Modell mit weniger Zuständen gibt.

(b) Geben Sie nun ein Baummodell $\mathcal{T}, v$ von ψ mit möglichst wenigen Zuständen an.

(c) Geben Sie eine ML-Formel φ an, sodass $\Diamond\varphi$ ein Baummodell $\mathcal{T}, v$ mit minimaler Anzahl an Zuständen besitzt. Das bedeutet, es darf *überhaupt kein* Modell (ungeachtet ob Baum oder nicht) $\mathcal{K}, w$ von $\Diamond\varphi$ mit weniger Zuständen als $\mathcal{T}$ geben.

Aufgabe 5 $2 + 3 + 2$ Punkte

Sei $\tau = \{(E_a)_{a \in A}, (P_i)_{i \in I}\}$ eine Signatur aus zweistelligen Relationssymbolen E_a für die Aktionen $a \in A$ und einstelligen Relationssymbolen P_i für $i \in I$.

Sei $\varphi \in \text{ML}$ eine modallogische Formel (mit Aktionen aus A und atomaren Eigenschaften P_i) und $\varphi^*(x) \in \text{FO}(\tau)$ eine prädikatenlogische Formel über dieser Signatur mit einer freien Variablen.

Wir sagen, dass die Formeln φ und $\varphi^*(x)$ *äquivalent* sind, falls für alle passenden Transitionssysteme $\mathcal{K} = (V, (E_a)_{a \in A}, (P_i)_{i \in I})$ und alle Zustände $v \in V$ aus $\mathcal{K}$ gilt:

$$\mathcal{K}, v \models \varphi \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathcal{K} \models \varphi^*(v).$$

Außerdem bezeichnet FO^2 die Menge der prädikatenlogischen Formeln, in denen *maximal* zwei verschiedene Variablen vorkommen.

(a) Verwenden Sie die Methode aus der Vorlesung, um die modallogische Formel

$$\psi := \Box(P \to \Diamond Q) \qquad \in \mathrm{ML}$$

in eine (im Sinne der oben genannten Definition) äquivalente Formel $\psi^*(x) \in \mathrm{FO}^2(\{E, P, Q\})$ zu übersetzen.

(b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht möglich ist. Geben Sie dazu eine prädikatenlogische Formel $\vartheta^*(x) \in \mathrm{FO}^2(\{E, P\})$ an, sodass *keine* äquivalente modallogische Formel $\vartheta \in \mathrm{ML}$ existiert. Außerdem muss Ihre Formel $\vartheta^*(x)$ folgende Bedingungen erfüllen:

- $\mathsf{frei}(\vartheta^*) = \{x\}$, das heißt, die Variable x soll frei in $\vartheta^*(x)$ vorkommen und
- in $\vartheta^*(x)$ soll noch eine andere Variable y vorkommen.

Beweisen Sie anschließend, dass es tatsächlich keine zu $\vartheta^*(x)$ äquivalente ML-Formel ϑ gibt.

(c) Geben Sie eine beliebige, erfüllbare modallogische Formel $\varphi \in \mathrm{ML}$ an, sodass jedes Modell $\mathcal{K}, v$ von φ mindestens 42 Elemente hat.

Hinweis: Schreiben Sie die Formel nicht aus, sondern nutzen Sie die Kurzschreibweisen für Konjunktionen und Disjunktionen oder eine induktive Definition. Bitte vermeiden Sie unpräzise Schreibweisen mit „ . . . “.