Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, L. Mrkonjić

SS 2021

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Montag, den 26.04., um 12:00 Uhr, online im Moodle-Lernraum.

Übungen und Teilaufgaben, die mit ● markiert sind, sind freiwillig und geben keine Punkte. Übungen, die mit * markiert sind, sind Bonusaufgaben. Der Inhalt aller Aufgaben ist für die Klausur relevant.

Organisatorische Hinweise (der Übungsbetrieb läuft über den Moodle-Lernraum):

- Bitte geben Sie Ihre Lösungen **online** im Moodle-Lernraum der Veranstaltung ab.
- Bitte geben Sie in **Gruppen von 3 bis 4 Personen** ab.
- Geben Sie bitte alle **Namen und Matrikelnummern** oben rechts auf Ihrer Lösung an.
- Abgaben müssen mit unserer LaTeX-Vorlage erstellt und im **PDF-Format** hochgeladen werden.
- Sie erhalten die Korrekturen online in Moodle. Fragen können Sie im Forum stellen.
- Im Moodle-Lernraum finden Sie hier mehr Hinweise zur Übungsabgabe.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im Moodle-Lernraum der Veranstaltung unter „eTest 1“ zu absolvieren.

Aufgabe 2 — $1 + 7 + 3$ Punkte

Die beiden berühmten Logiker Bertrand und David diskutieren über ihre gemeinsame Zeit als Studenten. Sie waren damals beste Freunde und haben genau die gleichen Wahlmodule belegt, können sich aber nicht mehr genau erinnern, welche Module das waren. Sie wissen noch, dass zur Auswahl die Module „Algebra“, „Computeralgebra“, „Ethik“, „Formale Systeme“ und „Grundlagen der Mathematik“ standen. Außerdem erinnern sie sich an die folgenden Tatsachen.

(i) Sie haben mindestens eins der fünf Wahlmodule belegt, aber nicht alle.

(ii) Um „Computeralgebra“ zu belegen, waren „Ethik“ und „Formale Systeme“ erforderlich.

(iii) Sie haben entweder sowohl „Algebra“ als auch „Grundlagen der Mathematik“ belegt, oder keins von beiden.

(iv) Obwohl Bertrand es paradox findet, sind sich beide sicher, dass „Computeralgebra“ eine Voraussetzung für „Algebra“ war.

Da sie aus diesen Tatsachen immer noch nicht schließen können, welche Module sie genau belegt haben, fangen sie nun an, zu spekulieren.

(v) Bertrand behauptet, dass er „Formale Systeme“ nie belegt hat.

(vi) David meint sich zu erinnern, dass „Grundlagen der Mathematik“ auf seinem Programm stand und er das Modul belegt hat, da es seiner Meinung nach „sicher irgendwie machbar“ war.

(vii) Inzwischen ist ihr gemeinsamer Freund Kurt vorbeigekommen und hat die Spekulationen mitbekommen. Er kann sich an alles sicher erinnern und gibt ihnen den Hinweis, dass genau einer der beiden mit seiner Spekulation Recht hat und der andere sich irrt.

Finden Sie durch geeignete Formalisierung in der Aussagenlogik heraus, ob Bertrand oder David Recht hatte und welche Wahlmodule die beiden belegt haben könnten. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Definieren Sie eine geeignete Variablenmenge und deren intendierte Semantik. Unterscheiden Sie durch Ihre Notation explizit zwischen Syntax und Semantik.

(b) Formalisieren Sie die Bedingungen (i) bis (vii) in der Aussagenlogik, indem Sie für jede Bedingung eine aussagenlogische Formel angeben.

(c) Bestimmen Sie aus den Aussagen, wer von den beiden Recht hatte und welche Module sie genau belegt haben. Gibt es mehrere Möglichkeiten? Argumentieren Sie semantisch mithilfe von Interpretationen (insbesondere nicht über Wahrheitstabellen oder Äquivalenzumformungen).

Aufgabe 3 $(2 + 2) + 2$ Punkte

Eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ heißt *nicht-trivial*, wenn sowohl φ als auch $\neg\varphi$ erfüllbar ist. Außerdem definieren wir den Junktor „$\oplus$“ durch $[\![\varphi \oplus \psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} \neq [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$ (exklusives Oder).

(a) Sind folgende Formeln Tautologien, nicht-trivial oder unerfüllbar? Argumentieren Sie semantisch mittels Interpretationen (ohne Wahrheitstabellen und Äquivalenzumformungen).

(i) $((A \oplus B) \oplus (C \oplus D)) \wedge (\neg(A \to B) \wedge \neg(C \to D))$

(ii) $((X \to \neg X) \vee (Y \to \neg Y)) \wedge ((X \to 0) \oplus (1 \to Y))$

(b) Zeigen Sie nur durch Äquivalenzumformungen, dass folgende Formeln logisch äquivalent sind.

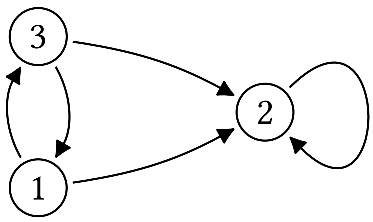
$$(A \vee (A \wedge B)) \vee (C \wedge D) \quad \text{und} \quad (\neg C \to A) \wedge ((\neg A \to C) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg D))$$

Hinweis: Sie dürfen auch die Äquivalenz $\psi \to \varphi \equiv \neg\psi \vee \varphi$ für $\psi, \varphi \in \mathsf{AL}$ verwenden.

Aufgabe 4 $1 + 3 + 4$ Punkte

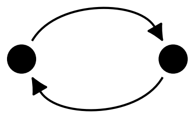
Wir ordnen einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$ die Interpretation $\mathfrak{I}_G$ über der Variablenmenge $\tau_n := \{X_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ zu, sodass $\mathfrak{I}_G(X_{ij}) = 1$ genau dann, wenn in G eine gerichtete Kante von i nach j existiert, d.h. $(i, j) \in E$.

(a) Geben Sie eine Formel φ mit $\tau(\varphi) = \tau_3$ an, sodass $\mathfrak{I}_G \models \varphi$ exakt für folgenden Graphen gilt:



(b) Konstruieren Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ eine Formel φ_n, die ausdrückt, dass der Graph einen gerichteten Kreis der Länge 2 als *induzierten* Teilgraphen enthält (d.h. für einen gerichteten Graphen G mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ gilt $\mathfrak{I}_G \models \varphi_n$ genau dann, wenn G einen gerichteten Kreis der Länge 2 als induzierten Teilgraphen enthält). Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion kurz, falls sie nicht sofort ersichtlich ist.

Hinweis: Gerichtete Kreise der Länge 2 sind Graphen, die genau die folgende Form haben (bis auf Benennung der Knoten und Darstellung):



Ein Teilgraph von $G = (V, E)$ ist ein Graph $H = (W, F)$ mit $W \subseteq V$ und $F \subseteq E$. Wir sagen, dass der Teilgraph H (durch W) *induziert* ist, wenn er alle Kanten aus G enthält, deren Endpunkte beide in W sind, d.h. wenn $F = E \cap W^2$ gilt. Zum Beispiel ist im Graphen aus Teilaufgabe (a) der von $W = \{1, 3\}$ induzierte Teilgraph ein gerichteter Kreis der Länge 2.

(c) Geben Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ eine Formel φ_n an, die ausdrückt, dass der Graph mindestens $n/2$ isolierte Knoten (d.h. Knoten ohne eingehende Kanten, ohne ausgehende Kanten und ohne Selbstkante) hat. Begründen Sie kurz die Idee und Korrektheit Ihrer Formel.

Aufgabe 5* 5* Punkte

Wir sagen, dass zwei aussagenlogische Formeln φ und ϑ sich widersprechen, wenn $\varphi \wedge \vartheta$ unerfüllbar ist. Zeigen Sie, dass es für alle Paare $\varphi, \vartheta \in \mathsf{AL}$, die sich widersprechen, eine Formel $\psi \in \mathsf{AL}$ mit $\tau(\psi) \subseteq \tau(\varphi) \cap \tau(\vartheta)$ gibt, sodass φ und $\neg\psi$ sich widersprechen sowie ϑ und ψ sich widersprechen.

Hinweis: Sie können das gesuchte ψ aus Formeln der Form $\varphi[\overline{x}/\overline{v}]$ konstruieren, wobei die Variablen $\overline{x} := \tau(\varphi) \setminus \tau(\vartheta)$ sind und $\overline{v} \in \{0, 1\}^{|\overline{x}|}$ eine mögliche Belegung für $\overline{x}$ ist. Die Schreibweise $\varphi[\overline{x}/\overline{v}]$ bezeichnet die Formel, die entsteht, wenn in φ jedes Vorkommen von x_i durch v_i ersetzt wird.