**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Pago

SS 2019

# 6. Übung Mathematische Logik

**Abgabe**: bis Dienstag, den 21.05., um 14:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, 1. Stock) oder in der Vorlesung.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.**
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

# Lösung

**Aufgabe 2** 4+4 Punkte

Formen Sie folgende Formeln zunächst in Negations-, dann in Pränex- und schließlich in Skolem-Normalform um. **Hierbei seien $a, b$ Konstantensymbole**.

(a) $\varphi := [\exists x \forall y(fxfyb = fxa) \lor \forall x(fxa = x)] \to \forall y \exists x(x = y)$

(b) $\psi := \forall u \forall v(\neg\neg(Svu \land \exists v Rva) \lor \exists w \neg(fwu \neq v \lor \exists x Rvx))$.

**Lösung:**

(a)

$$\begin{aligned}
\varphi &= [\exists x \forall y(fxfyb = fxa) \lor \forall x(fxa = x)] \to \forall y \exists x(x = y) \\
&\equiv \neg[\exists x \forall y(fxfyb = fxa) \lor \forall x(fxa = x)] \lor \forall y \exists x(x = y) \\
&\equiv [\forall x \exists y(fxfyb \neq fxa) \land \exists x(fxa \neq x)] \lor \forall y \exists x(x = y) \quad \text{( ist in NNF)} \\
&\equiv [\forall x \exists y(fxfyb \neq fxa) \land \exists v_1(fv_1a \neq v_1)] \lor \forall v_2 \exists v_3(v_2 = v_3) \\
&\equiv \forall x \exists y \exists v_1 \forall v_2 \exists v_3[((fxfyb \neq fxa) \land (fv_1a \neq v_1)) \lor (v_2 = v_3)] \quad \text{(ist in PNF)}
\end{aligned}$$

Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolem-NF:
$\forall x \forall v_2[((f(x, f(g_y(x), b) \neq f(x, a)) \land (f(g_{v_1}(x), a) \neq g_{v_1}(x))) \lor (v_2 = g_{v_3}(x, v_2))]$.
Die Klammern um die Funktionsargumente sind hier der Lesbarkeit wegen. Man kann sie setzen oder auch weglassen.

(b)

$$\begin{aligned}
\psi &= \forall u \forall v(\neg\neg(Svu \land \exists v Rva) \lor \exists w \neg(fwu \neq v \lor \exists x Rvx)) \\
&\equiv \forall u \forall v((Svu \land \exists v Rva) \lor \exists w(fwu = v \land \forall x \neg Rvx)) \quad \text{( ist in NNF)} \\
&\equiv \forall u \forall v((Svu \land \exists v' Rv'a) \lor \exists w(fwu = v \land \forall x \neg Rvx)) \\
&\equiv \forall u \forall v \exists v' \exists w \forall x((Svu \land Rv'a) \lor (fw'u = v \land \neg Rvx)) \quad \text{( ist in PNF)}
\end{aligned}$$

Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolem-NF:
$\forall u \forall v \forall x((Svu \land Rg_{v'}(u, v)a) \lor (f(g_w(u, v), u) = v \land \neg Rvx))$

**Aufgabe 4** 10 Punkte

Seien $E, <$ zweistellige, $A, B$ einstellige Relationssymbole und $f$ ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie ein – wenn möglich endliches – Axiomensystem für die folgenden Strukturklassen an.

(a) $\mathcal{K}_a = \{(U,<) : <$ ist eine lineare Ordnung, die weder diskret, noch dicht ist$\}$

(b) $\mathcal{K}_b = \{(U,f,A) : A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}} f^n(U)\}$[1]

(c) $\mathcal{K}_c = \{(U,E,A,B) : E$ ist der Graph einer bijektiven Funktion von $A$ nach $B\}$

(d) $\mathcal{K}_d = \{(U,E) : (U,E)$ ist ein ungerichteter Graph mit beliebig großen endlichen Kreisen$\}$

(e) $\mathcal{K}_e = \{(U,E,f) \mid E$ ist eine Kongruenzrelation von $(U,f)\}$, wobei eine Kongruenzrelation eine Äquivalenzrelation ist, die verträglich mit den Funktionen ist, also hier: Wenn $a$ und $b$ äquivalent sind, dann sind auch $f(a)$ und $f(b)$ äquivalent.

**Lösung:**

- $\Phi_u := \{\forall x\, \neg Exx, \forall x \forall y(Exy \rightarrow Eyx)\}$
- $\Phi_\ell := \{\forall x\, \neg x < x, \forall x\forall y(x = y \vee x < y \vee y < x), \forall x\forall y\forall z(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)\}$

(a) $\Phi_a := \Phi_\ell \cup \{\exists x\exists y\forall z(x < y \wedge \neg(x < z \wedge z < y)),$
$\exists x((\exists y(x < y) \wedge \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y)))$
$\vee(\exists y(y < x) \wedge \forall y(y < x \rightarrow \exists z(y < z \wedge z < x))))\}.$
Beachte: Man darf nicht vergessen zu formalisieren, dass das x, das keinen Vorgänger/keinen Nachfolger hat, nicht das Minimum bzw. Maximum ist, denn in dem Fall ist es ja erlaubt, keinen Vorgänger bzw. Nachfolger zu haben.

(b) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}} f^n(U)$ gilt genau dann wenn: $f(U) = A$. Denn wenn $f(U) = A$, dann gilt offensichtlich die geforderte Bedingung. Für die andere Richtung: Wenn $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}} f^n(U)$, dann existiert kein $x \in U$, sodass $f(u) \notin A$. Außerdem hat dann auch jedes $a \in A$ ein Urbild, also $f(U) = A$. Es ist zu beachten, dass die Vereinigung über die $f^n(U)$ erst bei $n = 1$ beginnt, d.h. es ist nicht einfach $A = U$.

$\Phi_b := \{\forall x(Ax \rightarrow \exists y(fy = x)), \forall x\exists y(fx = y \wedge Ay)\}$

(c) $\Phi_c := \{\forall x(Ax \rightarrow \exists y(Exy \wedge By \wedge \neg\exists y'(Exy' \wedge y \neq y'))), \forall x(\neg Ax \rightarrow \neg\exists y Exy), \forall x(Bx \rightarrow \exists y(Eyx \wedge \neg\exists y'(Ey'x \wedge y' \neq y)))\}$

(d) Hier hätte die Aufgabe eigentlich heißen sollen: "...ist ein ungerichteter Graph, der für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Kreis der Länge genau $n$ enthält." Denn "mit beliebig großen endlichen Kreisen" heißt streng genommen, dass es für jedes $n$ einen Kreis gibt, der mindestens Länge $n$ hat. Das ist jedoch nicht axiomatisierbar. Hier ist also ein Axiomensystem, das sagt, dass es für jedes $n$ einen Kreis der Länge genau $n$ gibt:

$\Phi_d := \Phi_u \cup \{\exists x_1 ... \exists x_n(\bigwedge_{i\neq j} x_i \neq x_j \wedge Ex_1x_2 \wedge Ex_2x_3 \wedge ... \wedge Ex_nx_1) \mid n \in \mathbb{N}^{\geq 3}\}$

(e) $\Phi_e := \{\forall x Exx, \forall x\forall y(Exy \rightarrow Eyx), \forall x\forall y\forall z((Exy \wedge Eyz) \rightarrow Exz), \forall x\forall y(Exy \rightarrow Efxfy)\}$

[1] $f^n$ bezeichnet die $n$-fache Anwendung von $f$.