Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2018

Klausur Mathematische Logik

Name:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	
Studiengang:	

Rerun LaTeXto create point data

Hinweise

Unsere Regeln für die Klausur: Es sind *keine* Hilfsmittel (Skripte, Bücher, Mitschriften oder dergleichen) zugelassen.

Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Geben Sie alle Aufgabenblätter mit ab.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hiermit bestätige ich, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und prüfungsfähig bin.

____
Unterschrift

Aufgabe 1 18 Punkte

Im Folgenden bezeichnen $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}$ beliebige Mengen von AL-Formeln, $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ beliebige Formeln der Aussagenlogik und X, Y, Z aussagenlogische Variablen. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Behauptungen (für jede Wahl von $\Phi, \Psi, \varphi, \psi, \dots$) wahr oder falsch sind. Ist die Behauptung wahr, so begründen Sie dies (etwa kurze Beweisskizze, Ergebnis aus der Vorlesung, ...). Ist die Behauptung falsch, so geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei φ eine erfüllbare Formel. Dann ist die Formel $\neg\varphi$ unerfüllbar.

Lösung: *2 Punkte*

Nein: z.B. $\varphi = X$ hat das Modell $\mathfrak{I}\colon X \mapsto 1$ und $\neg\varphi$ das Modell $\mathfrak{I}'\colon X \mapsto 0$.

(b) Angenommen es gilt $\varphi \equiv \psi$. Dann gilt: φ ist eine Formel in KNF genau dann, wenn ψ eine Formel in KNF ist.

Lösung: *2 Punkte*

Nein: $X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

(c) Angenommen $X \vee Y \models \varphi$. Dann ist φ nicht äquivalent zu einer Horn-Formel.

Lösung: *2 Punkte*

Nein: $\varphi = 0 \to 1$.

(d) $(X \wedge \neg Y) \vee Z$ ist äquivalent zu einer Horn-Formel.

Lösung: *2 Punkte*

Nein: Der Schnitt der beiden Modelle $\mathfrak{I}\colon X, Y, Z \mapsto 0, 0, 1$ und $\mathfrak{I}'\colon X, Y, Z \mapsto 1, 0, 0$ ist kein Modell.

(e) Angenommen φ ist eine AL-Formel, welche genau ein Modell besitzt (über ihrer Variablenmenge). Dann ist φ äquivalent zu einer Horn-Formel.

Lösung: *3 Punkte*

Ja: Definiere $X^\sigma := \begin{cases} X, & \sigma = 1 \\ \neg X, & \sigma = 0 \end{cases}$. Sei $\mathfrak{I}$ das eindeutige Modell von φ. Dann ist die Horn-Formel $\bigwedge_{X \in \tau(\varphi)} X^{\mathfrak{I}(X)}$ logisch äquivalent zu φ.

(f) Seien $\varphi(X_1, \dots, X_n), \psi(X_1, \dots, X_n) \in \mathrm{AL}$ erfüllbare Horn-Formeln mit $\varphi \equiv \psi$. Dann gibt der Markierungsalgorithmus angewendet auf φ und ψ das gleiche Modell aus.

Lösung: *2 Punkte*

Ja: Der Markierungsalgorithmus gibt das minimale Modell aus.

(g) Angenommen Ψ ist eine unendliche Menge und $\Phi \subseteq \Psi$ eine endliche Teilmenge. Dann gilt: Ist Φ erfüllbar, so ist auch Ψ erfüllbar.

Lösung: *2 Punkte*

Nein: $\Psi := \{X, \neg X\} \cup \{Y_i : i \in \mathbb{N}\}$ und $\Phi := \{X\}$ (bzw. $\Phi = \varnothing$).

(h) Angenommen $\Phi \models \varphi \vee \psi$. Dann existiert eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Phi$, so dass $\Delta \cup \{\neg\varphi\} \Rightarrow \psi$ eine gültige Sequenz der Aussagenlogik ist.

Lösung: *3 Punkte*

Ja: Nach V.S. gilt $\Phi \vdash \varphi \vee \psi$, d.h. es gibt eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Phi$ sodass $\Delta \Rightarrow \varphi \vee \psi$ eine gültige Sequenz (im SK) ist. Seien alle Formeln in $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ von $\mathfrak{I}$ erfüllt. Dann ist auch $\varphi \vee \psi$ erfüllt und damit ψ, da $\neg\varphi$ erfüllt ist.

Aufgabe 2 11 Punkte

(a) Weisen Sie mittels der Resolutionsmethode nach, ob folgende Klauselmenge erfüllbar ist.

$$\{\{\neg Z\}, \{\neg Y, \neg X\}, \{Y, X\}, \{Y, \neg X\}, \{\neg Y, Z\}\}$$

Lösung: *2 Punkte*

$\{Y\}$ aus $\{Y, X\}$ und $\{Y, \neg X\}$. $\{Z\}$ aus $\{Y\}$ und $\{\neg Y, Z\}$. $\square$ aus $\{\neg Z\}$ und $\{Z\}$.

(b) Nutzen Sie die Resolutionsmethode, um die Folgerungsbeziehung nachzuweisen:

$$\{\neg Z, Y \to X, X \to W, \neg W \vee \neg X\} \models \neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$$

Lösung: *3 Punkte*

Umformen: $\{\{\neg Z\}, \{\neg Y, X\}, \{\neg X, W\}, \{\neg W, \neg X\}, \{X, Y, Z\}\}$

$\{\neg X\}$ aus $\{\neg X, W\}$ und $\{\neg X, \neg W\}$. $\{Y, Z\}$ aus $\{\neg X\}$ und $\{X, Y, Z\}$. $\{\neg Y\}$ aus $\{\neg Y, X\}$ und $\{\neg X\}$. $\{Z\}$ aus $\{\neg Y\}$ und $\{Y, Z\}$. $\square$ aus $\{Z\}$ und $\{\neg Z\}$.

Da die leere Klausel ableitbar ist gilt die Folgerungsbeziehung.

(c) Geben Sie mit kurzer Begründung an, welche der folgenden Sequenzen Axiome sind.

(i) $Y \;\Rightarrow\; X, \neg X$

(ii) $X, ((\neg X \vee Y) \wedge (Z \to \neg Y)) \to (X \wedge Y) \;\Rightarrow\; Y, ((\neg X \vee Y) \wedge (Z \to \neg Y)) \to (X \wedge Y)$

Lösung: *2 Punkte*

Die erste Sequenz ist kein Axiom, da die Formelmengen disjunkt sind. Die Zweite ist eine, da die Formel $((\neg X \vee Y) \wedge (Z \to \neg Y)) \to (X \wedge Y)$ sowohl links, als auch rechts vorkommt.

(d) Begründen Sie *semantisch*, d.h. nicht mittels Ableitungen im Sequenzenkalkül, ob folgende Schlussregel korrekt ist.

$$\frac{\Gamma, \varphi \;\Rightarrow\; \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \;\Rightarrow\; \Delta, \neg\varphi}$$

Lösung: *4 Punkte*

Angenommen $\mathfrak{I} \models \Gamma, \neg\psi$. Aber $\mathfrak{I} \not\models \neg\varphi$ (sonst fertig). Dann gibt $\mathfrak{I} \models \Gamma, \varphi$, nach Prämisse also $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta \vee \psi$. Da wir wissen, dass $\mathfrak{I} \not\models \psi$ folgt $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$, was zu zeigen war.

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Geben Sie ein Modell der modallogischen Formel $\Box 0$ an.

Lösung: *2 Punkte*

•

(b) Formulieren Sie folgende Aussagen als Formeln in der Modallogik, oder zeigen Sie, dass dies nicht möglich ist.

(i) Vom aktuellen Knoten aus ist in maximal 3 Schritten ein Terminalknoten erreichbar.

Lösung: *2 Punkte*

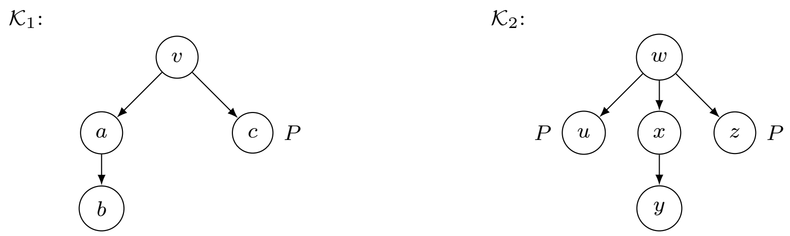
$$\Box 0 \lor \Diamond\Box 0 \lor \Diamond\Diamond\Box 0 \lor \Diamond\Diamond\Diamond\Box 0$$

(ii) Der aktuelle Knoten liegt auf einem Kreis der Länge 4.

Lösung: *3 Punkte*

Offenbar gibt es ein Modell, aber kein Baummodell, daher kann die Eigenschaft nicht in ML formulierbar sein.

(c) Geben Sie eine Bisimulation Z an, die zeigt, dass $\mathcal{K}_1, v \sim \mathcal{K}_2, w$ gilt.

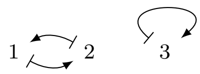


Lösung: *3 Punkte*

$$Z = \{(v,w),(a,x),(c,u),(c,z),(b,y)\}$$

Aufgabe 4 20 Punkte

(a) Sei $\mathfrak{A} = (A = \{1,2,3\}, f^{\mathfrak{A}})$, wobei die einstellige Funktion $f^{\mathfrak{A}}$ durch die Pfeile in der folgenden Zeichnung definiert ist:



(i) Geben Sie (mit Begründung) die Universen aller Substrukturen von $\mathfrak{A}$ an.

Lösung: *2 Punkte*

$$\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{3\}$$

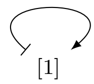
(ii) Geben Sie eine Kongruenzrelation $\sim$ auf $\mathfrak{A}$ an, sodass $a \neq b$ existieren mit $a \sim b$.

Lösung: *2 Punkte*

$$\sim := \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$$

(iii) Geben Sie die Faktorstruktur $\mathfrak{A}/_\sim$ zu Ihrer Relation $\sim$ an.

Lösung: *2 Punkte*



(iv) Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, dann gibt es einen Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Lösung: *3 Punkte*

Ja: Aus der VL wissen wir, dass zu jeder endlichen Struktur $\mathfrak{A}$ mit endlichem Alphabet ein Satz φ existiert, dessen Modelle alle zu $\mathfrak{A}$ isomorphen Strukturen sind. Dieser Satz muss natürlich in der Theorie von $\mathfrak{A}$ enthalten sein.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr sind.

(i) $\forall x \exists y (y \in \mathbb{N} \wedge x + y = x)$ ist ein $\mathrm{FO}(\{+,\cdot\})$-Satz.

Lösung: *2 Punkte*

Nein: $\in$ und $\mathbb{N}$ kommen nicht in der Signatur vor.

(ii) Sei $\varphi(x)$ eine $\mathrm{FO}(\{+\})$-Formel mit einer freien Variable, sodass $(\mathbb{N}, +) \models \varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist φ allgemeingültig.

Lösung: *3 Punkte*

Nein: Sei $\varphi(x) := \forall y x + y = y + x$. Dann ist die Bedingung an φ erfüllt. Aber φ ist nicht allgemeingültig. Betrachte dazu die Struktur $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, +^{\mathfrak{A}})$ mit $0 +^{\mathfrak{A}} 1 = 0$ und $1 +^{\mathfrak{A}} 0 = 1$.

(iii) Die Menge $\Phi = \{\neg \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y \bigvee_{1 \leq i \leq n} y = x_i : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ist erfüllbar.

Lösung: *2 Punkte*

Ja: Jeder einzelne Satz besagt, dass mindestens n Elemente existieren, also erfüllt $\mathbb{N}$ die Satzmenge.

(iv) Sei c ein Konstantensymbol, f ein einstelliges Funktionssymbol und sei R ein zweistelliges Relationssymbol.

Lösung: *2 Punkte*

Es gibt zwei verschiedene Herbrandstrukturen mit der Signatur $\{c, f, R\}$.

Ja: Die Relation R darf beliebig interpretiert werden, also gibt es die Herbrandstrukturen, in denen $R = \varnothing$ und $R = \{(c, c)\}$ ist.

(v) Es gibt einen Algorithmus der, gegeben eine endliche Menge Φ von FO-Sätzen, entscheidet, ob Φ ein Modell hat.

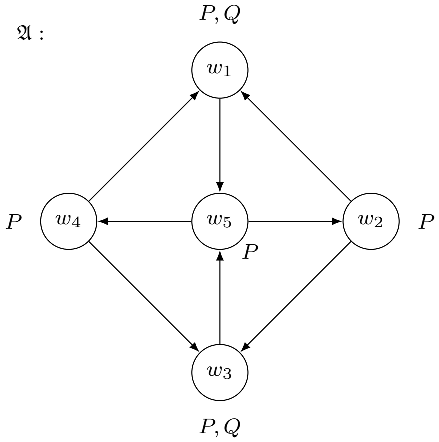
Lösung: *2 Punkte*

Nein: Sollte es solch einen Algorithmus geben, dann könnten wir das Erfüllbarkeitsproblem für FO lösen: Sei $\varphi \in$ FO, nun hat φ ein Modell gdw. $\{\varphi\}$ ein Modell hat. Da wir nicht entscheiden können, ob φ ein Modell hat, muss dieses Problem auch unentscheidbar sein.

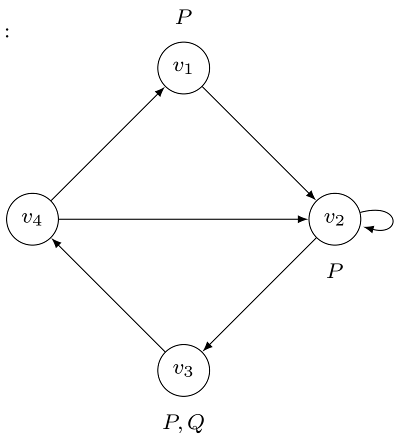
Aufgabe 5 22 Punkte

(a) Sei $\varphi := \exists x(Px \land \forall y(\neg Eyx \lor Qy))$. Welche der folgenden Strukturen sind Modell von φ? Begründen Sie Ihre Antworten!

$\mathfrak{A}$:



$\mathfrak{B}$:



Lösung: *4 Punkte*

$\mathfrak{A} \models \varphi$: Wähle $x = w_5$, alle Vorgänger sind in Q also ok.

$\mathfrak{B} \not\models \varphi$: Der einzige Knoten, dessen Vorgänger alle in Q sind ist v_4. Jedoch ist er nicht mit P beschriftet.

(b) Drücken Sie die folgenden Eigenschaften von gerichteten Graphen in FO($\{E\}$) aus:

(i) Von jedem Knoten ist jeder andere Knoten über einen Pfad der Länge *höchstens* 2 erreichbar. (Die Länge eines Pfades ist die Anzahl der verwendeten Kanten.)

Lösung: *3 Punkte*

$$\forall x \forall y(x = y \lor Exy \lor \exists z(Exz \land Ezy))$$

(ii) Es gibt einen Knoten ohne Selbstkante, dessen ausgehende Kanten nur zu Knoten mit Selbstkanten führen.

Lösung: *2 Punkte*

$$\exists x(\neg Exx \land \forall y(Exy \to \neg Eyy))$$

(iii) Der Graph enthält einen gerichteten Kreis der Länge 42 als *Substruktur*.

Lösung: *4 Punkte*

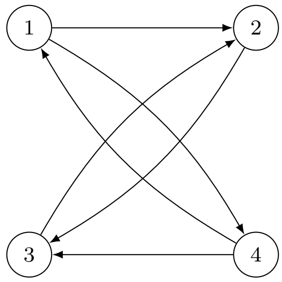
Bezeichne $I := \{(i,j) : j = (i \mod 42) + 1\}$

$$\exists x_1 \cdots \exists x_{42}(\bigwedge_{(i,j)\in I} Ex_ix_j \land \bigwedge_{(i,j)\notin I} \neg Ex_ix_j)$$

Beachte, dass aufgrund des zweiten Teils der Formel die x_i's alle verschieden sein müssen.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass folgende Elemente/Relationen in den angebenen Strukturen definierbar sind:

(i) Der Knoten 1 in dem folgenden gerichteten Graphen:



Lösung: *3 Punkte*

Das geht nicht, da der Isomorphismus $\rho\colon 1 \mapsto 4, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 1$ existiert.

(ii) Die Menge $\{2^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ in $(\mathbb{N}, +, \cdot, 1)$.

Lösung: *3 Punkte*

Hilfsformel $\varphi_|(x, y) := \exists z(x \cdot z = y)$

$$\varphi(x) := \forall y(\varphi_|(y, x) \land y \neq 1 \to \varphi_|(1 + 1, y)$$

(iii) Die Relation $\left\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2,\ a \neq 0 \neq b\right\}$ in $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +, \cdot, 1)$.

Lösung: *3 Punkte*

$$\varphi(x, y) := x = y$$

Aufgabe 6 17 Punkte

(a) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen und $m \in \mathbb{N}$. Wann heißen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ m-äquivalent? Wann heißen sie elementar äquivalent?

Lösung: *2 Punkte*

$\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ wenn für jeden passenden FO-Satz φ mit Quantorenrang maximal m gilt $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$.

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ wenn für jeden passenden FO-Satz φ gilt $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$.

(b) Formulieren Sie den Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé.

Lösung: *3 Punkte*

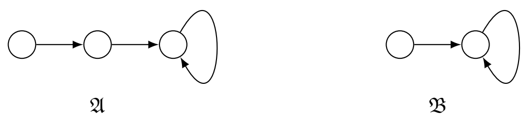
Sei τ endlich und relational.

$\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ gdw. D. das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gdw. D. das Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

(c) Geben Sie für die folgenden Paare von Strukturen jeweils mit kurzer Begründung an, ob sie elementar äquivalent sind. Wenn Sie dazu aus der Vorlesung oder Übung bekannte Methoden verwenden, genügt es, diese zu skizzieren. Falls die Strukturen nicht elementar äquivalent sind, geben Sie eine FO-Formel von minimalem Quantorenrang an, welche die Strukturen trennt.

(i) Die gerichteten Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, die wie folgt aussehen:

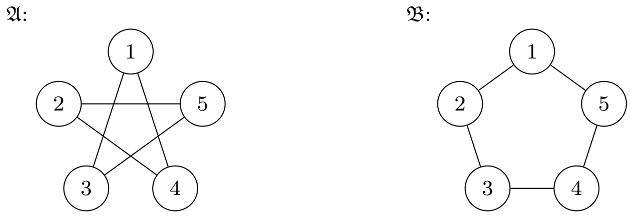


Lösung: *4 Punkte*

$\mathfrak{A} \equiv_1 \mathfrak{B}$: Beantworte einen Knoten mit Selbstschleife mit einem mit Selbstschleife (und umgekehrt).

$\mathfrak{A} \not\equiv_2 \mathfrak{B}$: $\varphi := \exists x \exists y (x \neq y \land \neg Exy \land \neg Eyx)$. Es gilt $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$.

(ii) Die beiden ungerichteten Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, die durch folgende Bilder gegeben sind:



Lösung: *4 Punkte*

Die beiden Graphen sind isomorph: $\rho\colon 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 3$.

(iii) $\mathfrak{A} = (\{r \in \mathbb{R} : 0 < r < 10\}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\{q \in \mathbb{Q} : -1 < q < 1\}, <)$.

Lösung: *4 Punkte*

Nicht isomorph wegen verschiedener Kardinalität, aber elementar äquivalent, da Beide dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte sind (vollständige Theorie).

Aufgabe 7 22 Punkte

(a) Seien $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ und $\varphi \in \mathrm{FO}$. Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an:

- $\Phi \models \varphi$,
- $\Phi \vdash \varphi$,
- Φ ist erfüllbar,
- Φ ist konsistent.

Lösung: *4 Punkte*

- $\Phi \models \varphi$ gdw. jedes Modell $\mathfrak{A} \models \Phi$ auch Modell von φ ist.
- Es eine endliche Menge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gibt, sodass $\Phi_0 \Rightarrow \varphi$ im SK ableitbar ist.
- Ein Modell $\mathfrak{A} \models \Phi$ existiert.
- Nicht jeder Satz aus Φ ableitbar ist (nicht für alle φ gilt $\Phi \vdash \varphi$).

(b) Geben Sie den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik an.

Lösung: *2 Punkte*

$\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi \vdash \varphi$ und Φ ist erfüllbar gdw. Φ konsistent ist.

(c) Sei E ein zweistelliges Relationssymbol. Wir wollen die Klasse $\mathcal{K}$ aller Graphen, in denen für jede natürliche Zahl n ein Weg[1] der Länge mindestens n vorkommt, axiomatisieren. Im Folgenden sind zwei Axiomensysteme gegeben, von denen genau eines diese Klasse axiomatisiert. Geben Sie das korrekte Axiomensystem an und begründen Sie, indem Sie ein passendes Gegenbeispiel angeben, weshalb das Andere die Klasse nicht axiomatisiert.

$$\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{>1}\}, \quad \text{wobei } \varphi_n := \forall x_1 \cdots \forall x_n (\bigwedge_{1 \le i < n} E x_i x_{i+1} \to \exists y\, E x_n y)$$

$$\Psi := \{\psi_n : n \in \mathbb{N}_{>1}\}, \quad \text{wobei } \psi_n := \exists x_1 \cdots \exists x_n (\bigwedge_{1 \le i < n} E x_i x_{i+1})$$

Lösung: *4 Punkte*

Ψ ist das richtige Axiomensystem.

Φ zwingt jeden Weg erweiterbar zu sein, also ist der Graph, der für jedes n einen Weg der Länge genau n hat kein Modell von Φ (obwohl er in der beschriebenen Klasse ist).

(d) Sei $\tau = \{E, f, g\}$, wobei E ein zweistelliges Relations- und f, g jeweils einstellige Funktionssymbole sind. Geben Sie für folgende Klassen von τ-Strukturen jeweils ein – sofern möglich endliches – Axiomensystem $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ an. Sollten Sie kein (endliches) Axiomensystem angeben, so beweisen Sie, dass es kein (endliches) Axiomensystem gibt.

(i) $\mathcal{K}_1 := \{(A, f, g) : f = g^{-1}\}$

Lösung: *3 Punkte*

$$\Phi := \{\forall x\, fgx = x \land gfx = x\}$$

[1] Auf einem Weg dürfen Knotenwiederholungen vorkommen.

(ii) Sei M eine beliebige Menge mit $|M| \geq |\mathbb{N}|$. $\mathcal{K}_2 := \{A : |A| \leq |M|\}$

Lösung: *4 Punkte*

$\mathbb{N} \in \mathcal{K}_2$, also hat $\mathcal{K}_2$ ein unendliches Modell. Wäre $\mathcal{K}_2$ FO-axiomatisierbar, so gäbe es für jede Menge N ein Modell der Mächtigkeit mindestens $|N|$. Wähle als Menge 2^M, nun erhalten wir einen direkten Widerspruch, da ein Modell $A \in \mathcal{K}_2$ mit $|2^M| \leq |A| \leq |M|$ existieren müsste.

(iii) $\mathcal{K}_3 := \{(A, f) : \text{Bild}(f) \text{ ist endlich}\}$

Lösung: *5 Punkte*

Die Klasse ist nicht FO-axiomatisierbar. Beachte, dass der Satz von L.-S. hier nicht angewandt werden kann, da unendlich große Modelle erlaubt sind: $(\mathbb{N}, f : n \mapsto 0)$ ist in $\mathcal{K}_5$.

Angenommen wir hätten ein Axiomensystem Φ für $\mathcal{K}_5$. Sei $\Psi := \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ wobei $\psi_n := \exists x_1 \cdots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \exists y fy = x_i)$. Dann ist $\Phi \cup \Psi$ unerfüllbar. Nach K.S. existiert also eine endliche, unerfüllbare Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$. Sei n maximal, so dass $\psi_n \in \Phi_0$. Dann ist aber $(\{0, \ldots, n\}, f : x \mapsto x)$ Modell von Φ_0.