

# Mathematische Logik

## SS 2019

Prof. Dr. Erich Grädel

Mathematische Grundlagen der Informatik  
RWTH Aachen



This work is licensed under:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>

Dieses Werk ist lizenziert unter:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>

© 2019 Mathematische Grundlagen der Informatik, RWTH Aachen.

<http://www.logic.rwth-aachen.de>

# Inhaltsverzeichnis

0	Notation und Konventionen	1
1	Aussagenlogik	3
1.1	Syntax und Semantik der Aussagenlogik . . . . .	3
1.2	Boolesche Funktionen und Normalformen . . . . .	10
1.3	Horn-Formeln . . . . .	15
1.4	Der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik . . . . .	17
1.5	Aussagenlogische Resolution . . . . .	24
1.6	Der aussagenlogische Sequenzenkalkül . . . . .	31
2	Syntax und Semantik der Prädikatenlogik	39
2.1	Strukturen . . . . .	40
2.2	Ein Zoo von Strukturen . . . . .	42
2.3	Syntax der Prädikatenlogik . . . . .	47
2.4	Semantik der Prädikatenlogik . . . . .	52
2.5	Normalformen . . . . .	56
2.6	Spieltheoretische Semantik . . . . .	64
3	Definierbarkeit in der Prädikatenlogik	73
3.1	Definierbarkeit . . . . .	73
3.2	Das Isomorphielemma . . . . .	77
3.3	Theorien und elementar äquivalente Strukturen . . . . .	81
3.4	Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele . . . . .	83
4	Vollständigkeitsatz, Kompaktheitssatz, Unentscheidbarkeit	93
4.1	Der Sequenzenkalkül . . . . .	93
4.2	Der Vollständigkeitsatz . . . . .	96
4.3	Der Beweis des Vollständigkeitsatzes . . . . .	98

4.4 Der Kompaktheitssatz, Axiomatisierbarkeit und Größe von Modellen . . . . .	109
4.5 Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik . . . . .	115
5 Modallogik, temporale Logiken und monadische Logik	121
5.1 Syntax und Semantik der Modallogik . . . . .	121
5.2 Bisimulation . . . . .	125
5.3 Abwicklungen und Baummodell-Eigenschaft . . . . .	130
5.4 Temporale Logiken . . . . .	131
5.5 Monadische Logik . . . . .	137
Symbols (glossaries)	139

## 0 Notation und Konventionen

In dieser Vorlesung ist 0 ein Element der natürlichen Zahlen.

Um klar zwischen logischen Formeln und metasprachlichen Aussagen und Beweisen über logische Formeln zu unterscheiden, ist es in der Logik nicht üblich, logische Junktoren und Quantoren ( $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ ) außerhalb von Formeln zu benutzen. Das gleiche gilt für das Symbol  $\Rightarrow$ , das in Kapitel 1 definiert wird und nicht mit dem Junktor  $\rightarrow$  zu verwechseln ist. An vielen Stellen bietet es sich an, metasprachliche Aussagen in Prosa zu formulieren.