

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Dienstag, den 07.05., um 14:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, 1. Stock) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an. Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1

10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im Moodle-Lernraum ¹

Aufgabe 2

4 + 4 + 4 Punkte

- (a) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül einen Beweis oder eine falsifizierende Interpretation für folgende Sequenz:

$$(\neg V \rightarrow (Z \vee W)) \wedge \neg(W \rightarrow V) \Rightarrow \neg V$$

- (b) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül einen Beweis oder eine falsifizierende Interpretation, um die Erfüllbarkeit der folgenden Formel nachzuweisen bzw. zu widerlegen:

$$(\neg A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A)$$

- (c) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül einen Beweis oder eine falsifizierende Interpretation für folgende Sequenz:

$$(Z \rightarrow X) \vee (Z \rightarrow Y), X \wedge Y, (A \wedge Y) \vee (A \wedge Z) \Rightarrow X \vee Z, (Z \rightarrow Y) \rightarrow A$$

Aufgabe 3

3 + 3 + 3 + 3 Punkte

Eine Schlussregel heißt korrekt, wenn aus der Gültigkeit der Prämissen die Gültigkeit der Konklusion folgt. Begründen Sie semantisch, d.h. nicht mittels Ableitungen im Sequenzenkalkül, ob folgende Schlussregeln korrekt sind. Hierbei bezeichne \downarrow den NOR-Operator, d.h. $\mathcal{J} \models (\varphi \downarrow \psi)$ gdw. $\mathcal{J} \not\models (\varphi \vee \psi)$.

- (a)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma, \psi \downarrow \vartheta \Rightarrow \Delta}$$

- (b)

$$\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \downarrow \vartheta}$$

¹<https://moodle.rwth-aachen.de/course/view.php?id=1662>

(c)

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi}$$

(d)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi \quad \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

Aufgabe 4

6 Punkte

Sei $\tau = \{X_i : i \in \mathbb{N}\}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass es eine Formelmenge $\Phi \subseteq \text{AL}$ gibt, welche genau dann durch eine Interpretation \mathcal{I} erfüllt wird, wenn $\mathcal{I}(Y) = 1$ für *unendlich viele* Variablen $Y \in \tau$ gilt.