

z.z. / Methode	Idee / Ansatz	Begründung / Argumentation	Beispiel
gar nicht axiomatisierbar (KS)	Finde ein unendliches Axiomensystem $\Psi$ für eine Strukturklasse $\mathcal{K}' \subseteq \text{Str}(\tau) - \mathcal{K}$ , so dass jede endliche Teilmenge von $\Psi$ ein Modell aus $\mathcal{K}$ besitzt (axiomatisiere also "gegenteilige Aussagen" durch $\Psi$ ).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Angenommen <math>\Phi</math> axiomatisiert <math>\mathcal{K}</math>; dann ist <math>\Phi \cup \Psi</math> unerfüllbar!</li> <li>• Nach KS gibt es endliches unerfüllbares <math>\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \Psi</math>.</li> <li>• Nach Wahl von <math>\Psi</math> gibt es ein Modell von <math>\Phi_0</math>; Widerspruch.</li> </ul>	$\mathcal{K}$ : Klasse aller endlichen Mengen; wähle $\Psi = \Phi_\infty$ .
nicht endlich axiomatisierbar (KS)	Wir nehmen an, ein unendliches Axiomensystem $\Phi$ für $\mathcal{K}$ zu kennen, welches aus gutem Grund unendlich viele Sätze benutzt. Genauer unterstellen wir, dass für jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gilt: $\mathcal{K} \not\subseteq \text{Mod}(\Phi_0)$ .	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ang. <math>\varphi</math> axiomatisiert <math>\mathcal{K}</math>; dann <math>\text{Mod}(\neg\varphi) = \text{Str}(\tau) - \mathcal{K}</math>.</li> <li>• Demnach ist <math>\{\neg\varphi\} \cup \Phi</math> unerfüllbar!</li> <li>• Nach KS gibt es endliches unerfüllbares <math>\Phi_0 \subseteq \{\neg\varphi\} \cup \Phi</math>.</li> <li>• Gebe nun ein Modell von <math>\Phi_0</math> an; Widerspruch.</li> </ul>	$\mathcal{K}$ : Klasse aller unendlichen Mengen; wähle $\Phi = \Phi_\infty$ .
gar nicht axiomatisierbar (EF-Spiele)	Sei $\tau$ relational und abzählbar. Dann finde $\tau$ -Strukturen $(\mathfrak{A}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ aber $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$ . Um $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}$ zu zeigen, finde Gewinnstrategie für Duplikatorin in $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B})$ (insb. für eine konstante Folge $\mathfrak{A}_m = \mathfrak{A}$ anwendbar, d.h. man findet $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}, \mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ ).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Angenommen <math>\Phi</math> axiomatisiert <math>\mathcal{K}</math>; dann <math>\mathfrak{B} \not\models \Phi</math>.</li> <li>• Wähle <math>\psi \in \Phi</math> mit <math>\mathfrak{B} \not\models \psi</math>. Sei <math>m := \text{qr}(\psi)</math>.</li> <li>• Wegen <math>\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}</math> gilt <math>\mathfrak{A}_m \not\models \psi</math>, also <math>\mathfrak{A}_m \not\models \Phi</math>; Widerspruch.</li> </ul>	$\mathcal{K}$ : Klasse aller abzählbaren Mengen; wähle $\mathfrak{A} = \mathbb{N}$ , $\mathfrak{B} = \mathbb{R}$ .
nicht endlich axiomatisierbar (EF-Spiele)	Wieder $\tau$ relational und abzählbar. Finde zwei Familien von $\tau$ -Strukturen $(\mathfrak{A}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und $(\mathfrak{B}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$ und $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ sowie $\mathfrak{B}_m \notin \mathcal{K}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ . Um $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$ zu zeigen, finde Gewinnstrategie für Duplikatorin in $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$ .	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Angenommen <math>\varphi</math> axiomatisiert <math>\mathcal{K}</math>; wähle <math>l := \text{qr}(\varphi)</math>.</li> <li>• Wegen <math>\mathfrak{A}_l \equiv_l \mathfrak{B}_l</math> gilt also <math>\mathfrak{A}_l \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B}_l \models \varphi</math>.</li> <li>• Wegen <math>\mathfrak{A}_l \in \mathcal{K}</math> und <math>\mathfrak{B}_l \notin \mathcal{K}</math>: Widerspruch.</li> </ul>	$\mathcal{K}$ : Klasse aller unendlichen Mengen; wähle $\mathfrak{A}_m = \mathbb{N}$ und $\mathfrak{B}_m = \{1, \dots, m\}$ .
nicht axiomatisierbar (aufsteig. Löw.-Skolem)	Beinhaltet $\mathcal{K}$ beliebig große endliche aber keine unendlichen Strukturen, so kann man sofort den aufsteigenden Satz Löw.-Skolem benutzen.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Angenommen <math>\Phi</math> axiomatisiert eine solche Strukturklasse <math>\mathcal{K}</math>.</li> <li>• Nach dem aufsteigenden Satz von Löw.-Skolem hat <math>\Phi</math> ein unendliches Modell <math>\mathfrak{A}</math>.</li> <li>• Da keine unendliche Struktur in <math>\mathcal{K}</math> enthalten ist: Widerspruch.</li> </ul>	$\mathcal{K}$ : Klasse aller endlichen Mengen.
nicht axiomatisierbar (Löw.-Skolem)	Beinhaltet $\mathcal{K}$ unendliche Strukturen und zwar ausschließlich solche, deren Kardinalität sich global "beschränken" lässt, so kann man die Löw.-Skolem-Sätze verwenden. Für jedes Axiomensystem findet man dann nämlich sehr kleine unendliche (abzählbare) Modelle und beliebig große unendliche Modelle.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Beinhaltet <math>\mathcal{K}</math> nur unendliche Strukturen <math>\mathfrak{A}</math> mit Mächtigkeit <math> \mathfrak{A}  &lt;  \mathcal{M} </math> für feste Menge <math>\mathcal{M}</math>, so verwerde aufsteigenden Satz von Löw.-Skolem und erhalte für hypoth. Axiomensystem <math>\Phi</math> ein Modell mit Mächtigkeit <math>\geq  \mathcal{M} </math>; Widerspruch.</li> <li>• Beinhaltet <math>\mathcal{K}</math> nur unendliche Strukturen <math>\mathfrak{A}</math> mit Mächtigkeit <math> \mathfrak{A}  &gt;  \mathbb{N} </math>, verwerde absteigenden Satz von Löw.-Skolem und erhalte für hypoth. Axiomensystem <math>\Phi</math> ein abzählbares Modell; Widerspruch.</li> </ul>	$\mathcal{K}$ : die Isomorphieklasse einer unendlichen Struktur.