

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 16.05., um 12:15 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, Erdgeschoss) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 0

10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum¹.

Aufgabe 1

4 + 4 Punkte

Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül Beweise oder falsifizierende Interpretationen für folgende Sequenzen.

- (a) $(\neg(Z \vee Y) \vee X) \wedge Q \Rightarrow (Q \vee X) \wedge (\neg Z \vee \neg Y)$
- (b) $((A \rightarrow B) \wedge \neg(A \rightarrow C)) \vee C \Rightarrow C \vee B$

Aufgabe 2

(3 + 3) + 2 + 2 Punkte

Eine Schlussregel heißt korrekt, wenn aus der Gültigkeit der Prämissen die Gültigkeit der Konklusion folgt. Begründen Sie semantisch, d.h. nicht mittels Ableitungen im Sequenzenkalkül, ob folgende Schlussregeln korrekt sind.

(a)

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \oplus \psi}$$

Wobei \oplus das exklusive Oder bezeichnet.

Führen Sie zudem einen alternativen Beweis mittels Ableitungen im Sequenzenkalkül. Da der Junktorsymbol \oplus dort nicht definiert ist, finden Sie eine aussagenlogische Formel $\vartheta \equiv \varphi \oplus \psi$ und weisen Sie dann die Korrektheit der Schlussregel

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}$$

nach.

(b)

$$(\vee \Rightarrow) \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta}$$

(c)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

¹<https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss18/18ss-19268/>

Aufgabe 3

3 + 3 Punkte

Geben Sie, unter Nachweis ihrer Korrektheit, Schlussregeln ($| \Rightarrow$) und ($\Rightarrow |$) für den Junktor $|$ mit $\varphi | \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \psi)$ an.

Aufgabe 4

2 + 5 Punkte

- (a) Geben Sie alle Redukte der Struktur $(\mathbb{C}, +, \cdot, <)$ an.
- (b) Geben Sie alle Substrukturen der folgenden Strukturen an.
- (i) $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, R^{\mathfrak{A}})$
 - (ii) $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, + \text{ mod } 5)$
 - (iii) $\mathfrak{C} = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, + \text{ mod } 6)$

Dabei ist R ein fünfstelliges Relationssymbol und $+ \text{ mod } n$ sind Funktionssymbole mit der üblichen Interpretation als Addition modulo n .