Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Wilke

SS 2018

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 25.04., um 12:00 Uhr im Übungskasten (Informatikzentrum, E1, Erdgeschoss) oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe oben rechts an.
Übungen, die mit einem Stern markiert sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im L2P-Lernraum[1] der Veranstaltung unter „eTests" zu absolvieren. Um Zugriff auf den Lernraum zu erhalten, melden Sie sich in Campus Office zum Tutorium an. Falls Sie sich aufgrund Ihres Studiengangs (z.B. Master Informatik Auflage) nicht über das modulare Anmeldeverfahren zur Vorlesung anmelden können, schreiben Sie eine E-Mail an wilke@logic.rwth-aachen.de.

Aufgabe 2 — 1 + 4 + 3 Punkte

Marion und Lothar haben einige Freunde zum Essen eingeladen und folgende Rückmeldungen erhalten:

(i) Wenn Claudius nicht kommt, möchte auch Desirée nicht kommen.

(ii) Mindestens einer der Zwillinge Benjamin und Emil kommt;

(iii) Entweder kommt Claudius oder Antonia, aber nicht beide;

(iv) Entweder kommen Antonia und Emil oder beide nicht;

(v) Wenn Benjamin kommt, dann kommen auch Emil und Desirée.

Finden Sie durch geeignete Formalisierung in der Aussagenlogik heraus, wer zum Abendessen kommt und wer nicht. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Definieren Sie eine geeignete Variablenmenge und deren intendierte Semantik. Unterscheiden Sie durch Ihre Notation explizit zwischen Syntax und Semantik.

(b) Formalisieren Sie die Bedingungen in der Aussagenlogik.

(c) Ermitteln Sie die Modelle Ihrer Formel. Argumentieren Sie dabei semantisch, d.h. mit Hilfe von Interpretation (insbesondere nicht über Wahrheitstabellen) und folgern Sie, wer zum Essen kommt.

Aufgabe 3 — 5 · 2 Punkte

Wir definieren den Junktor „$\leftrightarrow$" durch $[\![\varphi \leftrightarrow \psi]\!]^{\mathfrak{I}} := 1$ gdw. $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$.

(a) Sind folgende Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar? Argumentieren Sie mittels Interpretationen, benutzen Sie keine Wahrheitstabellen!

(i) $(X \to Y) \land (Z \leftrightarrow \neg X) \land (\neg Y \lor \neg Z) \land (X \lor Y)$

(ii) $((V \leftrightarrow W) \leftrightarrow (X \leftrightarrow Y)) \to ((X \to V) \land (Y \to W))$

(iii) $((X \lor Z) \land Y \land (\neg X \lor \neg Y) \land \neg Z) \to (X \land \neg X)$

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss18/18ss-19268/

(b) Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass folgende Formeln logisch äquivalent sind.

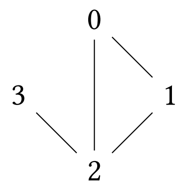
(i) $X \lor (Y \land Z)$ und $(\neg X \rightarrow Y) \land (X \lor Z)$

(ii) $X \land Y$ und $Y \land (((V \rightarrow Z) \land X) \lor (X \land Y))$

Aufgabe 4 1+4+5 Punkte

Wir ordnen einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{0, \ldots, n-1\}$ die Interpretation $\mathfrak{I}_G$ über der Variablenmenge $\tau_n = \{X_{ij} : 0 \leq i < j < n\}$ zu, so dass $\mathfrak{I}_G(X_{ij}) = 1$ genau dann, wenn $\{i, j\} \in E$.

(a) Geben Sie eine Formel φ mit $\tau(\varphi) = \tau_4$ an, so dass $\mathfrak{I}_G \models \varphi$ exakt für folgenden Graphen gilt:



(b) Konstruieren Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}^{>0}$ eine Formel φ_n, so dass für alle ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $\{0, \ldots, n-1\}$ genau dann $\mathfrak{I}_G \models \varphi_n$ gilt, wenn G zusammenhängend ist.

(c) Konstruieren Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}^{>0}$ eine Formel φ_n, so dass für alle ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $\{0, \ldots, n-1\}$ genau dann $\mathfrak{I}_G \models \varphi_n$ gilt, wenn G 3-färbbar ist.

Aufgabe 5 2 + 3 + 3 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen funktional vollständig sind.

(a) $\{1, \leftrightarrow\}$

(b) $\{\ominus, 1\}$, wobei $[\![x \ominus y]\!]^{\mathfrak{I}} := \max(0, [\![x]\!]^{\mathfrak{I}} - [\![y]\!]^{\mathfrak{I}})$

(c) $\{f, 0\}$, wobei $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ genau dann gilt, wenn $|\{i \in \{1, 2, 3\} : x_i = 0\}| \geq 2$

Aufgabe 6* 5* Punkte

Sei $\psi \rightarrow \varphi$ eine aussagenlogische Tautologie. Wir nennen ϑ eine *Interpolante* für $\psi \rightarrow \varphi$, wenn $\psi \rightarrow \vartheta$ und $\vartheta \rightarrow \varphi$ Tautologien sind und $\tau(\vartheta) \subseteq \tau(\psi) \cap \tau(\varphi)$. Zeigen Sie, dass eine Interpolante ϑ existiert.