

## 6. Übung Mathematische Logik

**Abgabe:** bis Mittwoch, den 31.05., um 18:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.  
**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

### Aufgabe 1

10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

### Aufgabe 2

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte

Sei  $\tau = \{f, R, S, T\}$ , wobei  $f$  ein einstelliges Funktionssymbol,  $R$  ein zweistelliges Relationssymbol und  $S, T$  einstellige Relationssymbole sind. Geben Sie für die folgenden Klassen von  $\tau$ -Strukturen (wenn möglich endliche) Axiomensysteme an.

- (a)  $\mathcal{K}_1 = \{(A, f, R, S, T) : R \text{ ist der Graph einer bijektiven Funktion zwischen } S \text{ und } T\}$
- (b)  $\mathcal{K}_2 = \{(A, f, R, S, T) : \text{das Urbild von } S \text{ unter } f \text{ ist unendlich}\}$
- (c)  $\mathcal{K}_3 = \{(A, f, R, S, T) : \text{der gerichtete Graph } (A, R) \text{ ist kreisfrei}\}$
- (d)  $\mathcal{K}_4 = \{(A, f, R, S, T) : f(s) \text{ ist von keinem } s \in S \text{ im gerichteten Graphen } (A, R) \text{ erreichbar}\}$
- (e)  $\mathcal{K}_5 = \{(A, f, R, S, T) : R \text{ ist lineare Ordnung mit } (x, f^n(x)) \in R \text{ für alle } x \in A, n > 0\}$
- (f)  $\mathcal{K}_6 = \{(A, f, R, S, T) : \text{es gilt } T \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(T)\}$
- (g)  $\mathcal{K}_7 = \{(A, f, R, S, T) : \text{es gilt } R = f(S) \times T\}$

### Aufgabe 3

3 Punkte

Finden Sie einen Satz  $\varphi_\infty \in \text{FO}(\{f\})$  für ein einstelliges Funktionssymbol  $f$ , so dass  $\varphi_\infty$  mindestens ein unendlich großes Modell, aber kein endliches Modell hat. Beweisen Sie, dass der Satz die gewünschte Eigenschaft hat.

### Aufgabe 4

1 + 1 + 1 + 1 + 3 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Aussagen für beliebige Signaturen  $\tau$ , Formelmengen  $\Phi \subseteq \text{FO}(\tau)$  und Formeln  $\varphi, \psi \in \text{FO}(\tau)$  gelten.

- (a) Ist  $\text{frei}(\varphi) \neq \text{frei}(\psi)$ , so gilt insbesondere auch  $\varphi \not\equiv \psi$ .
- (b) Es gibt unendlich viele verschiedene  $\text{FO}(\tau)$ -Formeln  $\vartheta$  mit  $\vartheta \equiv \forall x(\varphi \vee \psi)$ .
- (c)  $\varphi$  ist erfüllbar genau dann, wenn  $\forall x_1 \cdots \forall x_k \varphi$  erfüllbar ist.
- (d) Gilt  $\forall x \varphi \equiv \forall x \psi$ , so gilt insbesondere auch  $\exists x \varphi \equiv \exists x \psi$ .
- (e) Ist  $x$  eine Variable, die nicht frei in  $\Phi$  vorkommt, so gilt  $\Phi \models \varphi$  genau dann, wenn  $\Phi \models \forall x \varphi$ .

**Aufgabe 5**

3 + 3 Punkte

Sei  $\tau = \{P, R, c\}$ , wobei  $P$  ein einstelliges Relationssymbol ist,  $R$  ein zweistelliges Relationssymbol und  $c$  ein Konstantensymbol. Bringen Sie die folgenden Formeln in Negationsnormalform und in Pränex-Normalform. Achten Sie dabei auf freie Variablen.

(a)  $\forall x \forall y \exists z (Rxy \wedge Ryz \wedge \neg Rzx) \rightarrow (\forall x Px \rightarrow \exists x \forall y \neg (Rxy \wedge Rcx))$

(b)  $\exists y Rxy \leftrightarrow \forall x Rxx$