Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2017

2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 03.05., um 18:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2

10 Punkte

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass (i) $\{\neg, \leftrightarrow\}$ bzw. (ii) $\{\downarrow\}$ funktional vollständig sind, wobei $X \downarrow Y \equiv \neg X \wedge \neg Y$.
Hinweis zu (i): Eine Formel $\psi(X, \bar{Y})$ ist X-konstant wenn $\psi(\neg X, \bar{Y}) \equiv \psi(X, \bar{Y})$ und X-alternierend wenn $\psi(\neg X, \bar{Y}) \equiv \neg\psi(X, \bar{Y})$.

Zeigen Sie, dass jede nur aus $\neg$ und $\leftrightarrow$ zusammengesetzte Formel für jede Variable X entweder X-konstant oder X-alternierend ist.

(b) Sei $f \in B^3$ die durch

$$f(x, y, z) := \begin{cases} y, & \text{falls } x = 0 \\ z, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

definierte Boolesche Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\{f, 0, 1\}$ funktional vollständig ist.

Aufgabe 3

20 Punkte

(a) Prüfen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, ob die folgende Formelmenge erfüllbar ist. Geben Sie als Zwischenschritte die Mengen der markierten Variablen an.

$$\{A \wedge C \to B, F \wedge D \to H, D \wedge C \wedge E \to F, B \wedge C \to E, 1 \to A, H \to 0, (1 \to C) \wedge (A \to D)\}$$

(b) Für zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \colon \tau \to \{0, 1\}$ sind die Operationen wie folgt definiert:

Schnitt: $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2(X) := \min(\mathcal{I}_1(X), \mathcal{I}_2(X))$

Vereinigung: $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2(X) := \max(\mathcal{I}_1(X), \mathcal{I}_2(X))$

Komplement: $\neg\mathcal{I}_1(X) := 1 - \mathcal{I}_1(X)$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass Modelle von Horn-Formeln unter (i) Schnitt, (ii) Vereinigung, (iii) Komplement abgeschlossen sind, d.h. wenn φ eine Horn-Formel ist, und $\mathcal{I}_1 \models \varphi, \mathcal{I}_2 \models \varphi$, gilt dann auch (i) $(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2) \models \varphi$, (ii) $(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2) \models \varphi$, (iii) $\neg\mathcal{I}_1 \models \varphi$?

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jede Horn-Formel ein eindeutiges kleinstes Modell besitzt. Gilt auch die Umkehrung, also ist jede Formel, die ein eindeutiges kleinstes Modell besitzt, äquivalent zu einer Horn-Formel? *Hinweis:* Verwenden Sie für Ihre Argumentation Aufgabenteil (b).

(d) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Formeln äquivalent sind zu einer Horn-Formel. *Hinweis:* Verwenden Sie für Ihre Argumentation Aufgabenteil (b).

(i) $(Z \to (X \vee \neg Y)) \wedge (X \to (\neg Y \vee \neg Z)) \wedge \neg(X \to (\neg Y \wedge U))$

(ii) $((\neg U \wedge (Y \vee \neg X)) \to Z) \vee (X \wedge (\neg U \to U))$

(iii) $X \wedge \neg(\neg Y \to (\neg Y \wedge X)) \wedge ((X \wedge Y) \to (Y \vee \neg Z))$