Aufgabe 1

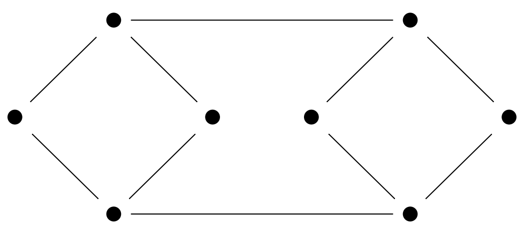
(a) Sei $\mathcal{L}_n := (\{0, 1, \ldots, n\}, <, \min, \max)$ die lineare Ordnung mit $n+1$ Elementen, $\min^{\mathcal{L}_n} = 0$ und $\max^{\mathcal{L}_n} = n$. Zeigen Sie, dass für alle n, m mit $n = m$ oder $n, m \geq 2^k$ gilt $\mathcal{L}_n \equiv_k \mathcal{L}_m$.

(b) Folgern Sie, dass es keinen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\{<\})$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{L}_n \models \varphi \Leftrightarrow n$ ist gerade.

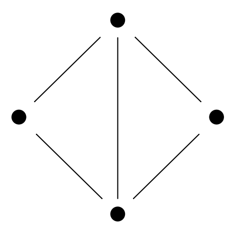
Aufgabe 2

Geben Sie für die folgenden Paare von Strukturen jeweils eine trennende FO-Formel mit minimalem Quantorenrang m sowie eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin im Spiel $\mathcal{G}_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an.

(a) $\mathfrak{A}$:



$\mathfrak{B}$:



(b) $\mathfrak{A} = \big(\mathbb{Z}, <^{\mathfrak{A}}\big)$ und $\mathfrak{B} = \big(\mathbb{Q}, <^{\mathfrak{B}}\big)$;

(c) $\mathfrak{A} = \big(\{0, 1, 2, 3\}, <^{\mathfrak{A}}\big)$ und $\mathfrak{B} = \big(\mathbb{N}, <^{\mathfrak{B}}\big)$.

Mit $<^{\mathfrak{A}}$ bzw. $<^{\mathfrak{B}}$ sind jeweils die normalen Ordnungen gemeint.