Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, M. Hoelzel

SS 2016

13. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 20.07., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Dieses Übungsblatt ist freiwillig und bringt ausschließlich Bonuspunkte.

Aufgabe 1* — 15* Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P-Lernraum[1].

Aufgabe 2* — 10* Punkte

(a) Verwenden Sie die Resolutionsmethode, um zu zeigen, dass folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(Z \to (Z \to U)) \wedge Y \wedge (Z \to Y) \wedge (\neg Y \to \neg X) \wedge (X \to \neg Z) \wedge (U \to X) \wedge (Y \to Z)$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Formel äquivalent zu einer Horn-Formel ist:

$$(X \to (Y \vee Z)) \ \wedge\ (Z \vee X) \ \wedge\ (Z \to X)$$

Aufgabe 3* — 10* Punkte

(a) Geben Sie einen Beweis im Sequenzenkalkül für die folgende Sequenz an:

$$\forall x((Qx \wedge \exists y Rxy) \to \neg Rcx), Rcc \ \Rightarrow\ \neg Qc$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie semantisch (d.h. nicht durch Ableiten im Sequenzenkalkül) die Korrektheit der folgenden Schlussregeln für die Prädikatenlogik.

(i) $$\frac{\Gamma, \exists x\varphi(x) \ \Rightarrow\ \Delta, \forall x\varphi(x)}{\Gamma, \varphi(c) \ \Rightarrow\ \Delta, \varphi(d)}$$

(ii) $$\frac{\Gamma, \exists x\varphi(x) \ \Rightarrow\ \Delta, \varphi(c), \varphi(d)}{\Gamma, \varphi(c) \ \Rightarrow\ \Delta, \varphi(d)}$$

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx

Aufgabe 4* 6* Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Relationen in den jeweiligen Strukturen definierbar sind:

(a) $\{z \in \mathbb{Z} \;:\; z \geq 17\}$ in $(\mathbb{Z}, \cdot)$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \;:\; x > 0\}$ in $(\mathbb{R}, \cdot)$

(c) $\{2n + 1 \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ in $(\mathbb{N}, +)$

Aufgabe 5* 14* Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Klassen von Strukturen axiomatisierbar bzw. endlich axiomatisierbar sind:

(a) Die Klasse der ungerichteten Graphen (V, E), in denen jeder Kreis die gleiche Länge hat.

(b) Die Klasse der Strukturen (A, f) wobei f eine selbst-inverse Funktion ist, d.h. $ffa = a$ für alle $a \in A$.

(c) Die Klasse aller endlichen Strukturen (A, f), so dass $ffa \neq a$ für alle $a \in A$ gilt.

(d) Die Klasse der ungerichteten Graphen (V, E, c) mit einem ausgezeichneten Knoten c von dem *kein* unendlich langer Pfad (ohne Knotenwiederholung) entspringt.

Aufgabe 6* 10* Punkte

Seien $\mathcal{K} = (V, E, P)$ und $\mathcal{K}' = (V', E', P')$ zwei *endlich verzweigte* Transitionssysteme und $v \in V$ sowie $v' \in V'$ zwei Knoten mit $\mathcal{K}, v \not\sim_n \mathcal{K}', v'$ für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$.

(a) Beweisen Sie die Existenz einer Formel $\psi \in \text{ML}$ mit $\text{md}(\varphi) \leq n$ und $\mathcal{K}, v \models \psi$ aber $\mathcal{K}', v' \not\models \psi$.

(b) Gibt es eine solche Formel ψ auch dann, wenn $\mathcal{K}$ oder $\mathcal{K}'$ (oder beide) *nicht endlich verzweigt* sind? Begründen Sie ihre Antwort!