Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, M. Hoelzel

SS 2016

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 04.05., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung. **Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

Aufgabe 1 10 Punkte

Diese Aufgabe ist online im L2P-Lernraum[1] der Veranstaltung unter „eTests“ zu absolvieren. Um Zugriff auf den Lernraum zu erhalten, melden Sie sich in Campus Office an. Falls Sie sich aufgrund Ihres Studiengangs (z.B. Master Informatik Auflage) nicht über das modulare Anmeldeverfahren anmelden können, schreiben Sie eine E-Mail an hoelzel@logic.rwth-aachen.de.

Aufgabe 2 8 Punkte

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg Y \vee \neg Z) \wedge (Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z).$$

(b) Überprüfen Sie mit der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel eine Tautologie ist:

$$(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Z) \vee (Z \wedge \neg Y) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z).$$

(c) Überprüfen Sie mit der Resolutionsmethode, ob die folgende semantische Folgerung gilt:

$$\{(\neg X \vee \neg Y), (\neg Y \vee Z), (\neg X \vee Z), (Y \vee X), (\neg Z \vee X \vee \neg Y)\} \models X \wedge \neg Y \wedge Z.$$

Aufgabe 3 6 Punkte

Wir definieren die *Doppelresolution* analog zum Resolutionsverfahren aus der Vorlesung, jedoch mit einem neuen Resolventenbegriff: Seien C, C_1, C_2 Klauseln. C heißt *Doppelresolvente* von C_1 und C_2, falls es (nicht notwendigerweise verschiedene) Literale Y, Z gibt, so dass $\{Y, Z\} \subseteq C_1$, $\{\overline{Y}, \overline{Z}\} \subseteq C_2$ und

$$C = (C_1 \setminus \{Y, Z\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{Y}, \overline{Z}\}).$$

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Der Doppelresolutionskalkül ist vollständig.

(b) Der Doppelresolutionskalkül ist korrekt.

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx

Aufgabe 4 8 Punkte

Ein Graph $G = (V, E)$ ist homomorph zu einem Graphen $H = (V', E')$, wenn es eine Funktion $f : V \to V'$ gibt, so dass für jede Kanten $(u, v) \in E$ in G bereits $(f(u), f(v)) \in E'$ eine Kante in H ist.

Sei H ein endlicher Graph. Zeigen Sie, dass G genau dann homomorph zu H ist, wenn jeder endliche Untergraph von G homomorph zu H ist.

Aufgabe 5 8 Punkte

Wir betrachten $\{0, 1\}^\omega$, die Menge der unendlichen 0-1-Wörter.
Ein *Flip-Set* $F \subseteq \{0, 1\}^\omega$ ist eine Menge von unendlichen Wörtern mit der folgenden Eigenschaft:

- Für zwei Wörter $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^\omega$, die sich nur an einer Stelle unterscheiden, gilt entweder $\alpha \in F$, oder $\beta \in F$.

Beweisen Sie, dass ein Flip-Set existiert.