Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, M. Hoelzel

SS 2016

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 20.04., um 12:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

ganz viele Punkte

Drucken Sie sich das Skript zu Kapitel 1 der Vorlesung, das Sie auf der Webseite finden, aus, oder sorgen Sie auf andere Art und Weise dafür, dass Sie das Skript beim Bearbeiten der Aufgaben vorliegen haben und benutzen.

Aufgabe 2

13 Punkte

Diese Aufgabe ist online im L2P-Lernraum[1] der Veranstaltung unter „eTests“ zu absolvieren. Um Zugriff auf den Lernraum zu erhalten, melden Sie sich in Campus Office zur Vorlesung an. Falls Sie sich aufgrund Ihres Studiengangs (z.B. Master Informatik Auflage) nicht über das modulare Anmeldeverfahren zur Vorlesung anmelden können, schreiben Sie eine E-Mail an hoelzel@logic.rwth-aachen.de.

Aufgabe 3

7 Punkte

Marion und Lothar haben einige Freunde zum Essen eingeladen und folgende Rückmeldungen erhalten:

(a) Wenn Antonia kommt, bringt sie Benjamin mit;

(b) Mindestens einer der Zwillinge Claudius und Desirée kommt;

(c) Entweder kommt Benjamin oder Emil, aber nicht beide;

(d) Entweder kommen Emil und Desirée oder beide nicht;

(e) Wenn Claudius kommt, dann kommen auch Desirée und Antonia.

Finden Sie durch geeignete Formalisierung in der Aussagenlogik heraus, wer zum Abendessen kommt und wer nicht.

Aufgabe 4

10 Punkte

(a) Geben Sie (mit Begründung) an, ob folgende Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind.

(i) $(X \to 1) \to (0 \to Y)$

(ii) $(X \land (Y \to \neg X)) \to (1 \to Y)$

[1] https://www3.elearning.rwth-aachen.de/ss16/16ss-19269/Dashboard.aspx

(iii) $\neg(\neg X \rightarrow (Y \rightarrow \neg X))$

(b) Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass folgende Formeln logisch äquivalent sind.

(i) $X \rightarrow (Y \wedge Z)$ und $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z)$

(ii) $(X \leftrightarrow \neg Y) \vee \neg X$ und $(X \wedge Y) \rightarrow \neg(Z \rightarrow X)$

Aufgabe 5 10 Punkte

Wir sagen zwei Interpretationen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2 : \tau \rightarrow \{0,1\}$ unterscheiden sich an genau k Variablen, wenn $|\{X \in \tau \;:\; \mathfrak{I}_1(X) \neq \mathfrak{I}_2(X)\}| = k$. Eine Formel $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ der Aussagenlogik mit n Variablen nennen wir k-instabil (für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$), wenn für alle Interpretation $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2 : \{X_1, \ldots, X_n\} \rightarrow \{0,1\}$, die sich an genau k Variablen unterscheiden, gilt

$$\mathfrak{I}_1 \models \varphi \Longleftrightarrow \mathfrak{I}_2 \not\models \varphi.$$

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ eine *gerade* Zahl. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die maximale Anzahl $f(k) \in \mathbb{N}$ an Variablen, die eine k-instabile Formel haben kann? Begründen Sie ihre Antwort, in dem Sie beweisen, dass es k-instabile Formeln mit $f(k)$ aber nicht mehr als $f(k)$ vielen Variablen gibt.

(b) Zeigen Sie, dass es für *ungerade* $k \in \mathbb{N}$ keine solche Schranke $f(k)$ wie in (a) gibt!