Aufgabe 1

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen zutreffen und geben Sie eine *kurze* Begründung an.

(i) Es gibt genau 4 paarweise nichtäquivalente aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ über der Variablenmenge $\tau = \{X, Y\}$, so dass jede Formel $\psi \in \mathrm{AL}$ über der Variablenmenge τ zu einer Formel φ_i äquivalent ist.

(ii) Sei φ eine AL-Formel, die nicht zu einer Horn-Formel äquivalent ist. Dann ist $\neg\varphi$ ebenfalls nicht äquivalent zu einer Horn-Formel.

(iii) Seien $\Psi_1, \Psi_2 \subseteq \mathrm{AL}$ zwei Mengen von AL-Formeln, so dass für jede endliche Teilmenge $\Phi_1 \subseteq \Psi_1$ eine endliche Teilmenge $\Phi_2 \subseteq \Psi_2$ existiert, so dass $\Phi_1 \cup \Phi_2$ erfüllbar ist. Dann ist $\Psi_1 \cap \Psi_2$ erfüllbar.

(iv) Seien $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$ zwei endliche Mengen von AL-Formeln, so dass $\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta$ eine gültige Sequenz ist. Für alle endlichen, nicht-leeren Mengen $\Gamma', \Delta' \subseteq \mathrm{AL}$ von AL-Formeln ist die Sequenz $\Gamma \cup \Gamma' \;\Rightarrow\; \Delta \cup \Delta'$ gültig.

(v) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine endliche Menge von AL-Formeln, und sei $\psi \in \mathrm{AL}$ eine AL-Formel, so dass $\Phi \models \psi$ gilt. Dann ist Sequenz $\neg\psi \;\Rightarrow\; \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$ gültig.

(vi) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen, so dass $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, aber $\mathfrak{A} \not\equiv_{m+1} \mathfrak{B}$, und sei $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ein Satz mit Quantorenrang $\mathrm{qr}(\varphi) = m + 1$. Dann gilt entweder $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$, oder $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ und $\mathfrak{B} \models \varphi$.

(vii) Sei τ eine endliche Signatur, und sei $\mathcal{K}$ eine FO-axiomatisierbare Klasse von τ-Strukturen, so dass alle Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ isomorph sind, also $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Dann sind alle Strukturen aus $\mathcal{K}$ endlich.

(viii) Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen, wobei τ endlich und relational ist. Sei $((a_i, b_i))_{i<m}$ eine Partie aus dem Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, die der Herausforderer gewinnt. Dann gilt $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$.

(ix) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine unendliche, erfüllbare Menge von $\mathrm{FO}(\tau)$-Sätzen. Dann gilt für jeden Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$, dass $\mathrm{Mod}(\Phi) \neq \mathrm{Mod}(\varphi)$.

(x) Der Satz $\varphi = \forall x \forall y (x \cdot 0 = y \wedge x \cdot 1 = y \cdot y \wedge 0 = 1) \in \mathrm{FO}(\{\cdot, 0, 1\})$ ist erfüllbar.