Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2015

Probeklausur Mathematische Logik

Aufgabe 1

(a) (i) Seien $R, \sim$ zweistellige Relationssymbole.
Ist die Zeichenkette $\forall x \forall y (\sim xy \rightarrow Rxy = Ryx)$ eine syntaktisch korrekte Formel? Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort an.

(ii) Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\{E\})$ an, so dass für jeden ungerichteten Graphen G gilt: $G \models \varphi$ genau dann, wenn G keinen Knoten ohne Nachbarn enthält.

(iii) Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie eine FO-Formel an, die in jeder $\{f\}$-Struktur $\mathfrak{A}$ die Menge der Fixpunkte von $f^{\mathfrak{A}}$ definiert.

(iv) Formulieren Sie den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik.

(v) Vervollständigen Sie die Definition: Eine Relation $R \subseteq A^r$ über einer τ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist elementar definierbar, wenn...

(b) Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen zutreffen und geben Sie eine *kurze* Begründung an (etwa, indem Sie ein Gegenbeispiel konstruieren, oder bekannte Ergebnisse aus der Vorlesung/Übung für Ihre Argumentation verwenden).

Achtung: Fehlt eine Begründung, so wird Ihre Lösung mit 0 Punkten bewertet.

(i) Sei F eine Menge von vier paarweise verschiedenen zweistelligen Booleschen Funktionen. Dann ist F funktional vollständig.

(ii) Sei φ eine Horn-Formel. Dann ist $(X \vee Y) \wedge \varphi$ nicht äquivalent zu einer Horn-Formel.

(iii) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ eine endliche Satzmenge und sei $\psi \in \mathrm{FO}$ ein Satz, so dass $\Phi \models \psi$. Dann ist die Sequenz $\neg\psi \Rightarrow \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$ im Sequenzenkalkül ableitbar.

(iv) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ eine unendliche Satzmenge und sei $\mathfrak{A} \models \Phi$. Dann existiert eine unendliche echte Teilmenge Φ' von Φ, so dass $\mathfrak{A} \models \Phi'$.

(v) Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine vollständige Theorie und sei $\mathfrak{A} \models T$. Falls $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ für einen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$, so gilt $\neg\varphi \in T$.

(vi) Seien Φ, Ψ unendliche, disjunkte Mengen von AL-Formeln, so dass jede Interpretation, die Modell von Φ ist, auch Modell von Ψ ist, und umgekehrt. Wenn $\Phi \cup \Psi \models \varphi$, dann existiert nicht zwingend eine endliche Menge $\Phi' \subseteq \Phi$, so dass $\Phi' \models \varphi$.

(vii) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ endliche Strukturen, so dass die Duplikatorin das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel für jedes $m \in \mathbb{N}$ gewinnt. Dann gilt $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

(viii) Sei $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}_{i+1}$ eine Folge von FO-axiomatisierbaren Klassen von Strukturen. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_n$ FO-axiomatisierbar.

(ix) Sei f ein einstelliges Funktionssymbol, und sei $\varphi = \forall x \exists y (fy = x)$. Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$, dann ist auch jede Substruktur von $\mathfrak{A}$ Modell von φ.

(x) Der Satz $\forall x \exists y (x = y \rightarrow x \neq y)$ ist unerfüllbar.

Aufgabe 2

(a) Verwenden Sie die Einheitsresolution für Horn-Formeln auf geeignete Weise, um zu überprüfen, ob folgende Formel erfüllbar oder unerfüllbar ist:

$$(X \to Y) \land (Y \to Z) \land (Z \to Y) \land (Z \to (Z \to X)) \land (X \to \neg Z) \land Y.$$

(b) Wir betrachten die beiden folgenden Mengen Φ, Ψ von AL-Formeln:

$$\Phi := \{X_{i+1} \to (X_i \wedge X_{i+2}) \mid i \in \mathbb{N}, i \text{ ungerade}\}$$
$$\Psi := \{(X_i \to \neg X_{2i+1}) \mid i \in \mathbb{N}, i \text{ gerade}\}$$

Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Folgerungsbeziehung gilt:

$$\Phi \cup \Psi \cup \{X_2\} \models \neg X_4.$$

(c) Es ist bekannt, dass Modelle von Horn-Formeln unter Schnitt abgeschlossen sind. Analog dazu definieren wir nun die *Vereinigung von Interpretationen* $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \colon \tau \to \{0,1\}$:

$$(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2) : \tau \mapsto \{0,1\},\ (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)(X) := \max(\mathcal{I}_1(X), \mathcal{I}_2(X)).$$

(i) Zeigen oder widerlegen Sie, dass Modelle von Horn-Formeln auch unter Vereinigung abgeschlossen sind.

(ii) Sei φ eine erfüllbare AL-Formel, deren Modelle unter Vereinigung abgeschlossen sind. Weisen Sie nach, dass das maximale Modell von φ eindeutig ist.

(d) Sei $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen von AL-Formeln mit $\Phi_n \subseteq \Phi_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und sei ψ eine AL-Formel, so dass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n \models \psi$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass dann ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\Phi_n \models \psi$.

(e) Seien Φ_1, Φ_2 Mengen von AL-Formeln und sei φ eine AL-Formel, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

(1) $\Phi_1 \cup \{\neg\psi\}$ ist unerfüllbar für jedes $\psi \in \Phi_2$.

(2) Es existiert eine endliche Menge $\Gamma \subseteq \Phi_2$, so dass die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \varphi$ im Sequenzenkalkül ableitbar ist.

Zeigen Sie, dass dann auch $\Phi_1 \models \varphi$ gilt.

Aufgabe 3

(a) Definieren Sie die Ableitbarkeitsbeziehung „$\vdash$“.

(b) Formulieren Sie den Vollständigkeitssatz für den Sequenzenkalkül der Prädikatenlogik.

(c) Betrachten Sie den Teil des Kompaktheitssatzes der Prädikatenlogik, der sich mit der Folgerungsbeziehung beschäftigt. Erläutern Sie, wie diese Aussage aus dem Vollständigkeitssatz folgt.

(d) Beweisen Sie durch Ableiten im Sequenzenkalkül die Gültigkeit der folgenden Sequenz der Prädikatenlogik:

$$\forall x\,((Qx \land \exists y Rxy) \rightarrow \neg Rcx)\,,\, Rcc \Rightarrow \neg Qc$$

Schlussregeln des Sequenzenkalküls

$$(=)\quad \frac{\Gamma, t = t \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(S \Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow S)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$$

$$(\neg \Rightarrow)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg)\quad \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \rightarrow \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \rightarrow \vartheta}$$

$$(\exists \Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta}\ {}^{*} \qquad (\Rightarrow \exists)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)}$$

$$(\forall \Rightarrow)\quad \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\psi(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \forall)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\psi(x)}\ {}^{*}$$

für ein Konstantensymbol c und beliebige Terme t, t'.

*wenn c in Γ, Δ und ψ nicht vorkommt

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

(e) Beweisen Sie semantisch (d.h. *nicht* durch Ableiten im Sequenzenkalkül) die Korrektheit der folgenden Schlussregel für die Prädikatenlogik:

$$\frac{\Gamma, \varphi(fc) \ \Rightarrow \ \Delta}{\Gamma, \exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \Delta}$$

wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist, das in Γ, Δ und φ nicht vorkommt.

Aufgabe 4

Seien f, g zweistellige Funktionssymbole und seien $0, 1$ Konstantensymbole. Weiter sei T die Menge der Grundterme über $\{f, g, 0, 1\}$. Weiterhin seien S und P zweistellige Relationssymbole. Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{T} = (T, P^{\mathfrak{T}}, S^{\mathfrak{T}}, f^{\mathfrak{T}}, g^{\mathfrak{T}})$ wobei

- $f^{\mathfrak{T}}(t, t') = ftt'$,
- $g^{\mathfrak{T}}(t, t') = gtt'$ und
- $S^{\mathfrak{T}} \subseteq T \times T$ mit $(t', t) \in S^{\mathfrak{T}}$ genau dann, wenn t' ein Subterm von t ist. (Z.B. sind die Subterme von $fg001$ die Terme $fg001, g00, 0$ und 1).
- $P^{\mathfrak{T}} = \{(t, t') \mid |t|_f = |t'|_f \pmod 2\}$. Hier ist $|t|_f$ die Anzahl der f, die in t vorkommen.

a) Beschreiben Sie einen Automorphismus π von $\mathfrak{T}$, welcher *nicht* die Identität ist.
Hinweis: Beachten Sie, dass 0 und 1 nicht in der Signatur enthalten sind.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Relationen in $\mathfrak{T}$ elementar definierbar sind.

(i) $R_1 = \{t \mid g \text{ kommt in } t \text{ nicht vor}\}$.

(ii) $R_2 = \{t \mid 0 \text{ kommt in } t \text{ nicht vor}\}$.

(iii) $R_3 = \{t \mid |t|_f = 0 \pmod 2\}$.

c) Geben Sie für die folgenden Paare von Strukturen jeweils eine Formel von *möglichst kleinem* Quantorenrang m an, welche die Strukturen trennt und geben Sie eine Gewinnstrategie für den Herausforderer im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an, oder zeigen Sie, dass keine solche Formel existiert.

(i) $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z} \cup \{\pm\frac{1}{n} \mid n \geq 2\}, <)$.

(ii) $\mathfrak{A} = (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, E^{\mathfrak{A}})$ mit $E^{\mathfrak{A}} = \{((n,m),(n,m+1)) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, E^{\mathfrak{B}})$ mit $E^{\mathfrak{B}} = \{(r, r+1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 5

Sei $\tau = \{E, R, B\}$ mit zweistelligem Relationssymbol E und einstelligen Relationssymbolen R, B. Wir sagen, dass Elemente in R die Farbe rot und Elemente in B die Farbe blau besitzen.

Ein 2-*gefärbter Graph* ist eine τ-Struktur $G = (V, E, R, B)$, so dass (V, E) ein ungerichteter Graph ist, in dem jeder Knoten $v \in V$ genau eine der Farben rot oder blau besitzt, und zwar so, dass alle Paare von benachbarten Knoten $(v, w) \in E$ unterschiedliche Farben besitzen.

(a) Geben Sie einen FO(τ)-Satz $\varphi_{\mathcal{C}}$ an, der die Klasse $\mathcal{C}$ der 2-gefärbten Graphen axiomatisiert.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie für die folgenden Klassen von τ-Strukturen jeweils, dass sie FO-axiomatisierbar sind. Geben Sie jeweils ein, falls möglich endliches, Axiomensystem an oder beweisen Sie, dass ein solches nicht existiert.

Hinweis: Beachten Sie, dass alle nachfolgenden Klassen Teilklassen von $\mathcal{C}$ sind.

(i) $\mathcal{K}_1 = \{G \in \mathcal{C} \mid$ es gibt mindestens 13 rote Knoten, die jeweils mindestens einen Nachbarn in G haben$\}$.

(ii) $\mathcal{K}_2 = \{G \in \mathcal{C} \mid R \text{ ist endlich und } B \text{ ist endlich}\}$.

(iii) $\mathcal{K}_3 = \{G \in \mathcal{C} \mid \text{falls es nur endlich viele blaue Knoten in } G \text{ gibt,}$

$\text{so gibt es unendlich viele rote Knoten in } G\}$.

(iv) $\mathcal{K}_4 = \{G \in \mathcal{C} \mid G$ enthält nur endlich viele Kreise der Länge 3$\}$.