Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2015

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 20.05. um 14:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Geben Sie alle Redukte der Struktur $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ an.

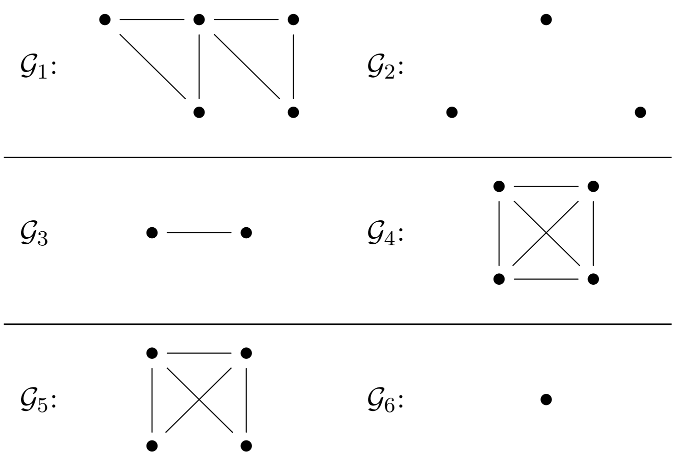
(b) Geben Sie alle Substrukturen von $(\mathbb{N}, \leq)$ und von $(\mathbb{N}, S)$ an, wobei $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Nachfolgerfunktion auf $\mathbb{N}$ ist, das heißt $S(n) = n + 1$.

(c) Geben Sie für zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ die kleinste Substruktur von $(\mathbb{Z}, +, -)$ an, welche m und n enthält. Ist dies eine echte Substruktur?

(d) Geben Sie alle Substrukturen der Strukturen $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ sowie $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ (mit Addition modulo 4 bzw. 5) an.

Aufgabe 3 5 Punkte

Wir betrachten folgende Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$:



Bestimmen Sie, in welchen dieser Graphen folgende Sätze jeweils gelten. Geben Sie kurze und prägnante Begründungen an.

$\varphi_1 := \forall x \forall y (x \neq y \to Exy)$;

$\varphi_2 := \exists x \exists y \exists z (Exy \land Eyz \land Ezx)$;

$\varphi_3 := \exists x \forall y (x \neq y \to Exy)$;

$\varphi_4 := \exists x \forall y (\neg Exy)$.

$\varphi_5 := \forall x \exists y \forall z (Exy \land (Eyz \land y \neq x \to \neg Ezx))$

Aufgabe 4 8 Punkte

Die Arithmetik ist die τ_{ar}-Struktur $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ (mit der natürlichen Interpretation von $+, \cdot, 0$ und 1). Geben Sie jeweils eine Formel $\varphi(x, y) \in \mathrm{FO}(\tau_{ar})$ an, so dass $\mathfrak{N} \models \varphi(a, b)$ gdw. das Paar $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) a teilt b;

(b) a ist eine Primzahl;

(c) a und b sind teilerfremd;

(d) a ist eine Zweierpotenz;

(e) Die Binärdarstellungen von a und b haben die gleiche Länge.

Aufgabe 5 7 Punkte

(a) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen über dem Universum A bzw. B, sodass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Zeigen Sie per Induktion über den Termaufbau: Für jeden Term t und jede Belegung $\beta : \mathrm{var}(t) \mapsto A$ gilt

$$[\![t]\!]^{(\mathfrak{A},\beta)} = [\![t]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)} \ .$$

(b) Sei τ eine Signatur und sei $\mathfrak{B}$ eine τ-Struktur. Beweisen Sie, dass für jede quantorenfreie Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ und alle Substrukturen $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ für alle $a_1, \ldots, a_k$ aus dem Universum von $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \ .$$

Folgern Sie, dass alle Substrukturen von $\mathfrak{B}$ die gleichen quantorenfreien Sätze erfüllen.