Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2015

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 06.05. um 14:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(X \lor Z) \land (Y \lor \neg Z \lor X) \land (\neg X \lor Z) \land (\neg Y \lor \neg Z) \land (Y \lor \neg X)\,.$$

(b) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel allgemeingültig ist:

$$(\neg X \land Z) \lor Y \lor (X \land \neg V \land \neg Y) \lor (\neg Z \land \neg Y) \lor (X \land V)\,.$$

(c) Beweisen Sie die folgende semantische Folgerung anhand der Resolutionsmethode:

$$\{\neg Y \lor X\ , Z \lor Y \lor X \lor \neg U\ , \neg Z \lor Y\ , \neg X \lor V\ , Z \lor X \lor U\} \models X \land V\,.$$

Aufgabe 3 10 Punkte

Das Schubfachprinzip von Dirichlet (1805-1859) ist ein unschätzbares Werkzeug der Kombinatorik. In seiner einfachsten Variante lautet es: Werden $n + 1$ Perlen auf n Schubfächer verteilt, so gibt es wenigstens ein Schubfach mit mehr als einer Perle.

(a) Formulieren Sie dieses Prinzip in der Aussagenlogik für einen gegebenen Wert $n \in \mathbb{N}$

(b) Zeigen Sie durch Resolution, dass das Prinzip für $n = 2$ gilt.

Aufgabe 4 5 Punkte

Betrachten Sie Klauselmengen mit höchstens zwei Literalen in jeder Klausel. Zeigen Sie, dass man mit der Resolutionsmethode effizient entscheiden kann, ob solche Klauselmengen erfüllbar sind. Geben Sie eine obere Schranke für die Anzahl der Resolutionsschritte an, die der Resolutionsalgorithmus auf solchen Klauselmengen braucht. Geht das auch für Klauselmengen mit höchstens drei Literalen pro Klausel?

Aufgabe 5 5 Punkte

Wir betrachten $\{0,1\}^\omega$, die Menge der unendlichen 0-1-Wörter $b_0 b_1 \dots$ mit $b_i \in \{0,1\}$ für $i = 0, 1, \dots$.
Ein *Flip-Set* $F \subseteq \{0,1\}^\omega$ ist eine Menge von unendlichen Wörtern mit der folgenden Eigenschaft:

- Für zwei Wörter $\alpha, \beta \in \{0,1\}^\omega$, die sich nur an einer Stelle unterscheiden, gilt entweder $\alpha \in F$, oder $\beta \in F$.

Verwenden Sie den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik, um zu zeigen, dass ein Flip-Set existiert.