

#### 4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 14.05. um 09:00 Uhr am Lehrstuhl.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

##### Aufgabe 1

10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

##### Aufgabe 2

10 Punkte

- (a) Eine Schlussregel heißt *korrekt*, wenn für alle aussagenlogischen Formelmengen und Formeln  $\Gamma, \Delta, \varphi, \psi \dots$  aus der Gültigkeit der Prämissen die Gültigkeit der Konklusion folgt.

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln:

(i)

$$\frac{\Gamma, \psi \rightarrow \varphi \Rightarrow \Delta \quad \neg\varphi \Rightarrow \neg\psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

(ii)

$$\frac{\Gamma, \psi \rightarrow \varphi \Rightarrow \Delta \quad \neg\varphi \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

- (b) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül einen Beweis oder eine falsifizierende Interpretation für die folgende Sequenz:

$$\neg(X \rightarrow Y) \wedge (\neg Y \rightarrow (Z \vee X)) \Rightarrow \neg Y$$

- (c) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül einen Beweis oder eine falsifizierende Interpretation, um nachzuweisen, ob die folgende Formel erfüllbar ist:

$$(\neg X \rightarrow Y) \vee \neg(Y \rightarrow X)$$

##### Aufgabe 3

10 Punkte

- (a) Wir definieren den aussagenlogischen *Majoritätsjunktork* Maj mit der Semantik  $\mathfrak{J} \models \text{Maj}(\varphi, \psi, \vartheta)$  gdw.  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathfrak{J}} + \llbracket \psi \rrbracket^{\mathfrak{J}} + \llbracket \vartheta \rrbracket^{\mathfrak{J}} \geq 2$ . Geben Sie Schlussregeln  $(\text{Maj}, \Rightarrow)$  und  $(\Rightarrow, \text{Maj})$  an, die die Einführung des Majoritätsjunktors auf der linken bzw. rechten Seite der Konklusion erlauben und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schlussregeln.
- (b) Konstruieren Sie im um die Regeln  $(\text{Maj}, \Rightarrow)$ ,  $(\Rightarrow, \text{Maj})$  erweiterten Sequenzenkalkül einen Beweis für die Sequenz

$$\text{Maj}(X, Y \wedge Z, \neg X) \Rightarrow \text{Maj}(Y, Z, Z) .$$