Aufgabe 1

Betrachten Sie folgende Strukturen. Bestimmen Sie jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ oder beweisen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Geben Sie im ersten Fall eine Formel vom Quantorenrang m an, welche die Strukturen trennt, sowie Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin in den Spielen $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(i) $\mathfrak{A}_1 := (\{1, 2, 3, 4\}, <)$;

(ii) $\mathfrak{A}_2 := (\{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} : n \in \mathbb{N}\}, <)$;

(iii) $\mathfrak{A}_3 := (\mathbb{N}, <)$;

(iv) $\mathfrak{A}_4 := (\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}, <)$

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Theorie T_{dl} der dichten linearen Ordnungen nicht vollständig ist und dass die Theorie T_{dlo} der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte vollständig ist.

(b) Sei $\tau = \{P, Q\}$ mit einstelligen Relationssymbolen P und Q. Zeigen Sie, dass die Theorie der τ-Strukturen $\mathfrak{A}$, in denen $P^{\mathfrak{A}}$ und $Q^{\mathfrak{A}}$ unendlich sind und eine Partition des Universums bilden, vollständig ist. Bleibt die Theorie vollständig, auch wenn $P^{\mathfrak{A}}$ und $Q^{\mathfrak{A}}$ keine Partition bilden?