Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Lessenich

SS 2013

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 15.05. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Hinweis: Aufgaben mit einem * können freiwillig bearbeitet werden und geben Zusatzpunkte.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Eine Schlussregel für den Sequenzenkalkül ist korrekt, wenn aus der Gültigkeit der Prämissen die Gültigkeit der Konklusion folgt.

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln für den Sequenzenkalkül. Argumentieren Sie semantisch, d.h. mit Hilfe von Interpretationen.

(i)
$$\frac{\Gamma, \varphi \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \qquad \Gamma, \psi \;\Rightarrow\; \Delta, \vartheta}{\Gamma, \neg\vartheta \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \rightarrow \varphi}$$

(ii)
$$\frac{\Gamma, \varphi \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \qquad \Gamma, \varphi \wedge \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \rightarrow \varphi}$$

(b) Konstruieren Sie Beweise oder falsifizierende Interpretationen im Sequenzenkalkül.

(i) $X, X \vee Z, Z \rightarrow Y \;\Rightarrow\; Y, Q, X \rightarrow Z, \neg Z \rightarrow Y$

(ii) $\neg X \wedge \neg Y, \neg Q \vee \neg Z \;\Rightarrow\; X \rightarrow (Y \wedge Q)$

Aufgabe 2 15 Punkte

(a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln äquivalent sind zu einer Horn-Formel. Wenn ja, überprüfen Sie per Einheitsresolution, ob sie erfüllbar sind.

(i) $(X \leftrightarrow (Y \rightarrow \neg Z)) \vee (Z \wedge (Y \rightarrow \neg Z))$

(ii) $\neg((X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge Z)) \wedge \Big(Q \rightarrow \Big((X \rightarrow Z) \wedge ((W \wedge \neg W) \vee (W \wedge X))\Big)\Big)$
$\wedge\, Q \wedge (\neg W \vee \neg Z)$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen, wobei Φ, Ψ Mengen von AL-Formlen sind, und $\varphi, \psi, \vartheta, \eta$ AL-Formeln:

(i) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Psi \models \varphi$, dann auch $\Phi \cup \Psi \models \varphi$.

(ii) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Psi \models \varphi$, dann auch $\Phi \cap \Psi \models \varphi$.

(iii) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Psi \subseteq \Phi$ eine endliche Teilmenge ist, dann auch $\Psi \models \varphi$.

(iv) Wenn φ eine Tautologie ist, $\varphi \in \Phi$, $\neg\varphi \notin \Phi$, und $\Phi \models \psi$, dann $\{\neg\vartheta \mid \vartheta \in \Phi\} \models \neg\psi$.

(v) Sei Φ abgeschlossen unter $\models$, also für alle ψ mit $\Phi \models \psi$ gilt $\psi \in \Phi$. Sei φ eine AL-Formel, so dass $\varphi \notin \Phi$. Dann ist Φ erfüllbar.

(vi) Sei Φ eine Formelmenge, so dass für alle $\varphi, \psi \in \Phi$ auch $\varphi \wedge \psi \in \Phi$. Wenn $\Phi \models \vartheta$, dann $\eta \models \vartheta$ für unendlich viele $\eta \in \Phi$.

Aufgabe 3 5+5* Punkte

(a) Für einen (möglicherweise unendlichen) endlich verzweigten ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ nennen wir eine Teilmenge $P \subseteq E$ der Kanten ein *perfektes Matching*, wenn für jeden Knoten $v \in V$ genau ein $w \in V$ mit $(v, w) \in P$ existiert.

Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik, dass G genau dann ein perfektes Matching besitzt, wenn sich jeder beliebig große endliche Teilgraph zu einem Teilgraphen erweitern lässt, der ein perfektes Matching besitzt.

Hinweis: Benutzen Sie eine Aussagenvariable $X_{u,v}$ für jede Kante $(u, v) \in E$.

(b)* Sei $G = (\mathbb{N}^{>0}, E)$ der gerichtete Graph über den positiven natürlichen Zahlen, bei dem $(n, m) \in E$ genau dann gilt, wenn $0 \leq m - 2n \leq 1$.

Zeigen Sie, dass es für jede unendliche Menge $W \subseteq \mathbb{N}^{>0}$ eine unendliche Folge $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ von natürlichen Zahlen gibt, so dass $(n_i, n_{i+1}) \in E$ für alle i, und für jedes i ist von n_i ein Element $w_i \in W$ in G erreichbar.

Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von König.