Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Lessenich

SS 2013

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 08.05. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

(a) Für eine Klauselmenge $\mathcal{K}$ heißt ein Literal L *einfach*, wenn L in $\mathcal{K}$ vorkommt, $\overline{L}$ aber nicht. Mit $\mathcal{V}$ bezeichnen wir die Menge der einfachen Literale, also

$$\mathcal{V} = \{L \in \bigcup_{C \in \mathcal{K}} C \mid \overline{L} \notin \bigcup_{C \in \mathcal{K}} C\}.$$

(Beachten Sie, dass $L = \neg X$ erlaubt ist.) Wir definieren $\mathcal{K}' := \{C \in \mathcal{K} \mid C \cap \mathcal{V} = \emptyset\}$ als die Menge der Klauseln aus $\mathcal{K}$, die kein Literal aus $\mathcal{V}$ enthalten.

Zeigen Sie, dass für jede Klauselmenge $\mathcal{K}$ gilt, dass $\mathcal{K}$ genau dann erfüllbar ist, wenn $\mathcal{K}'$ erfüllbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Klauselmenge $\mathcal{K}$, die keine Klausel enthält, die nur aus positiven Literalen besteht, oder die keine Klausel enthält, die nur aus negativen Literalen besteht, immer erfüllbar ist.

(c) Überprüfen Sie mit der Resolutionsmethode, ob die folgende Formelmenge unerfüllbar ist:

$$\{(X \to (Y \vee Z)), (Z \to V), (Y \vee V), (Z \to (\neg X \vee V)), (V \vee \neg Y \vee \neg Z), ((Z \wedge \neg V) \to X),$$
$$\neg(\neg V \vee \neg Z), (X \to (V \vee Z)), (V \vee \neg X \vee \neg Y), ((\neg V \wedge \neg X) \to (Y \vee Z)), \neg(\neg V \wedge X)\}$$

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe (a).

Aufgabe 2 — 10 Punkte

(a) Wir definieren folgende Einschränkung des Resolutionskalküls: Bei der *monotonen Resolution* wählt man zu Beginn des Verfahrens ein Bit $b \in \{0, 1\}$. Ist $b = 0$, so darf nur dann eine Resolvente aus Klauseln C_1, C_2 gebildet werden, wenn entweder C_1 oder C_2 nur negative Literale enthält. Ist $b = 1$, so darf die Resolvente aus C_1 und C_2 nur dann gebildet werden, wenn entweder C_1 oder C_2 nur positive Literale enthält.

Zeigen Sie, dass die monotone Resolution (i) vollständig und (ii) korrekt ist.
Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis aus der Vorlesung.

(b) Zeigen Sie per monotoner Resolution, dass die Klauselmenge

$$\mathcal{K} = \{\{X, \neg Y\}, \{Q, Z, \neg X\}, \{\neg Z, Q\}, \{\neg Q, \neg Y\}, \{Y\}\}$$

unerfüllbar ist.

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Begründen Sie für die folgenden Sequenzen semantisch, d.h. mit Hilfe von Interpretationen, ob sie gültig sind.

   (i) $X \vee Y, Y \vee Z, Z \vee X \Rightarrow Y \wedge X$

   (ii) $X \vee Z, Z \rightarrow \neg Q, Q \leftrightarrow \neg Y \Rightarrow \neg X \rightarrow Y$

(b) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül Beweise oder falsifizierende Interpretationen für die folgenden Sequenzen:

   (i) $(\neg X \vee Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \Rightarrow X \rightarrow Z$

   (ii) $(X \wedge Y) \rightarrow Z, X \vee Y \Rightarrow \neg Z \rightarrow X$