**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Lessenich

SS 2013

## 3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis **Dienstag**, den 30.04. um **11:45** Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

### Aufgabe 1 — 10 Punkte

Sei $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Mengen von aussagenlogischen Formeln, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\Psi_n \subsetneq \Psi_{n+1}$. Sei $\Psi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n$, und sei $\varphi$ eine AL-Formel. Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Aussagen für alle $\Psi_n, \Psi, \varphi$ mit den genannten Eigenschaften gelten.

(a) Wenn $\Psi$ erfüllbar ist, dann sind auch alle $\Psi_n$ erfüllbar.

(b) Wenn alle $\Psi_n$ erfüllbar sind, dann ist auch $\Psi$ erfüllbar.

(c) Wenn für ein $n$ gilt, dass $\Psi_n \models \varphi$, dann auch $\Psi \models \varphi$.

(d) Wenn $\Psi \models \varphi$, dann auch $\Psi_i \models \varphi$ für alle $i$.

(e) Wenn $\Psi \models \varphi$, dann existiert ein $J \in \mathbb{N}$, so dass $\Psi_j \models \varphi$ für alle $j \geq J$.

### Aufgabe 2 — 10 Punkte

Wir betrachten die Potenzmengenalgebra $\mathfrak{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, \mathbb{N})$ über den natürlichen Zahlen.

- Ein *Filter* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist eine Menge von Mengen mit den folgenden Eigenschaften:
  - $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$
  - Wenn $v \in \mathcal{F}$ und $w \in \mathcal{F}$, dann auch $v \cap w \in \mathcal{F}$
  - Wenn $v \in \mathcal{F}$ und $v \subseteq w$, dann auch $w \in \mathcal{F}$
- Die Menge aller co-endlichen Mengen $\mathcal{F}_F := \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \overline{v} \text{ ist endlich}\}$ nennen wir den *Fréchet-Filter*.
- Ein *Ultrafilter* $\mathcal{U}$ ist ein Filter mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass für jede Menge $v \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ entweder $v \in \mathcal{U}$ oder $\overline{v} \in \mathcal{U}$ gilt.

(a) Weisen Sie nach, dass der Fréchet-Filter tatsächlich ein Filter ist.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathcal{U}_n := \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid n \in v\}$ für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ein Ultrafilter ist.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik, dass ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ existiert, der den Fréchet-Filter erweitert, also für den gilt, dass $\mathcal{F}_F \subseteq \mathcal{U}$.
*Hinweis:* Verwenden Sie Aussagenvariablen $X_v$ für jedes $v \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und konstruieren Sie eine Formelmenge $\Phi$, die genau dann erfüllbar ist, wenn ein solcher Ultrafilter $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}_F$ existiert.

**Aufgabe 3** 10 Punkte

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg Y \vee \neg Z) \wedge (Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z).$$

(b) Überprüfen Sie mit der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel eine Tautologie ist:

$$(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Z) \vee (Z \wedge \neg Y) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z).$$

(c) Überprüfen Sie mit der Resolutionsmethode, ob die folgende semantische Folgerung gilt:

$$\{(\neg X \vee \neg Y), (\neg Y \vee Z), (\neg X \vee Z), (Y \vee X), (\neg Z \vee X \vee \neg Y)\} \models X \wedge \neg Y \wedge Z.$$