Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Lessenich

SS 2013

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 17.04. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Eine Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ heißt *nicht-trivial* wenn sowohl φ als auch $\neg\varphi$ erfüllbar ist. Geben Sie an, ob die folgenden Formeln Tautologien, nicht-trivial oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

(1) $\big((Z \rightarrow (Y \wedge (X \vee \neg Z) \wedge \neg X)) \vee (Z \wedge \neg Z)\big) \wedge (Z \wedge (Y \rightarrow \neg Y))$;

(2) $\big(Z \rightarrow ((X \vee Y) \wedge \neg Z)\big) \vee \big(Z \wedge (Y \rightarrow (X \rightarrow Y))\big)$;

(3) $(X \rightarrow (Z \vee Y)) \wedge \big(\neg X \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \wedge (Z \leftrightarrow \neg Y))\big)$.

(b) Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen (siehe Skript S. 6), dass folgende Formeln logisch äquivalent sind:

(1) $(X \wedge Y) \rightarrow (Z \wedge Q)$ und $\neg((X \rightarrow Z) \wedge (X \rightarrow Q)) \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow Q))$;

(2) $(X \rightarrow (Z \rightarrow (Y \wedge Z))) \wedge (X \rightarrow (Y \vee Z))$ und $X \rightarrow Y$;

(3) $(X \wedge (Y \leftrightarrow Z)) \vee (Y \rightarrow Z) \vee ((X \leftrightarrow Y) \wedge X)$ und $\neg Y \vee X \vee Z$.

Aufgabe 2 10 Punkte

Bei einer Lotterie wurden fünf Kugeln $K_1, \dots, K_5$ aus einer Kiste gezogen. Jede Kugel ist entweder rot oder blau. Folgende Informationen über die Kugeln sind bekannt:

(a) Mindestens eine der Kugeln K_3 oder K_4 ist rot;

(b) Entweder Kugel K_5 und Kugel K_4 sind beide rot, oder beide blau;

(c) Wenn Kugel K_3 rot ist, dann sind auch Kugeln K_4 und K_1 rot;

(d) Entweder Kugel K_2 oder Kugel K_5 ist rot, aber nicht beide;

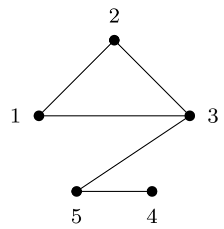
(e) Wenn Kugel K_1 rot ist, dann ist auch Kugel K_2 rot.

Finden Sie durch geeignete Formalisierung in der Aussagenlogik heraus, welche Kugeln rot sind, und welche blau.

Aufgabe 3 10 Punkte

Jeden ungerichteten Graphen mit Knoten $1, \dots, n$ identifizieren wir mit einer aussagenlogischen Interpretation in folgender Weise: Jedem Paar $i < k$ von Knoten wird eine Variable X_{ik} zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen i und k gibt.

(a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die ausdrückt, dass der Graph die folgende Gestalt hat:



(b) Konstruieren Sie für beliebige n Formeln φ_n, die ausdrücken, dass der Graph bipartit ist.

(c) Konstruieren Sie für beliebige n Formeln φ_n^{ij}, die ausdrücken, dass im Graphen ein Pfad von Knoten i zu Knoten j existiert.

Aufgabe 4 10 Punkte

(a) Konstruieren Sie eine Formel $\psi(X_0, X_1, X_2)$, so dass für alle dazu passenden Interpretationen $\mathfrak{I} : \{X_0, X_1, X_2\} \to \{0, 1\}$ gilt, dass $\mathfrak{I}$ genau dann ein Modell von ψ ist, wenn $|\{i : \mathfrak{I}(X_i) = 1\}|$ gerade ist.

(b) Geben Sie für jedes n eine Formel $\varphi_n(X_0, \ldots, X_{n-1})$ mit der Eigenschaft aus (a) an.

(c) Zu gegebenen Interpretationen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3 : \{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\} \to \{0, 1\}$ definieren wir die neue Interpretation $\Delta[\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3] : \{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\} \to \{0, 1\}$ durch

$$\Delta[\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3](X) := \begin{cases} 0, & \text{falls } |\{i \in \{1,2,3\} : \mathfrak{I}_i(X) = 1\}| \text{ ist gerade} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass falls $\mathfrak{I}_1 \models \varphi_n$, $\mathfrak{I}_2 \models \varphi_n$ und $\mathfrak{I}_3 \models \varphi_n$ gilt, so auch $\Delta[\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3] \models \varphi_n$.