Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- Wenn $\Phi \models \psi$ und $\Phi \models \neg\psi$, dann ist Φ unerfüllbar.
- Wenn Φ unerfüllbar ist, dann gilt $\Phi \models \psi$ für alle Formeln $\psi \in \mathrm{AL}$.
- $\Phi \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$ gilt genau dann, wenn $\Phi \models (\psi \vee \varphi)$.
- $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \models \varphi$ gilt genau dann, wenn $\Phi \models \varphi$.

Aufgabe 2

Ein ungerichteter Graph heißt *bipartit*, wenn seine Knotenmenge in zwei Mengen A und B zerfällt, so dass jede Kante einen Knoten von A mit einem Knoten von B verbindet.

Beweisen Sie durch Anwendung des Kompaktheitssatzes, dass ein (möglicherweise unendlicher) Graph G genau dann bipartit ist, wenn jeder endliche (knoteninduzierte) Teilgraph von G bipartit ist.

Aufgabe 3

Sei $\Phi_0 \subsetneq \Phi_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \Phi_n \subsetneq \ldots$ eine zunehmende unendliche Mengenfolge von aussagenlogischen Formeln. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\Phi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n$ genau dann erfüllbar ist, wenn alle Φ_n erfüllbar sind.